Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

Caracterización de Estudiantes con Talento en Matemática mediante Tareas de Invención de Problemas

Johan Espinoza González

GRANADA, 2018

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DE ESTUDIANTES CON TALENTO EN MATEMÁTICA MEDIANTE TAREAS DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de los Doctores Jose Luis Lupiáñez Gómez e Isidoro Segovia Álex, del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta D. Johan Espinoza González para optar por el grado de Doctor en Ciencias de la Educación

Fdo Johan Espinoza González

V°B° de los Directores

Dr. José Luis Lupiáñez Gómez　　　　　Dr. Isidoro Segovia Alex

GRANADA, 2018

El doctorando Johan Espinoza González y los directores de la tesis José Luis Lupiáñez Gómez e Isidoro Segovia Alex, garantizamos al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de autor al ser citados cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones

Granada a, 14 de diciembre de 2018

Doctorando

Fdo.: D. Johan Espinoza González

Directores

Fdo.: José Luis Lupiáñez Gómez

Fdo.: Isidoro Segovia Alex

Esta investigación se realizó en el seno del Grupo de investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM-193) y en el marco del proyecto de investigación EDU 2015-70565P "Competencia didáctica del profesor y aprendizaje de conceptos matemáticos escolares" Ministerio de Economía y Competitividad (España)

Su autor es becario de la Universidad Nacional de Costa Rica

A mi esposa Viviana, por su comprensión y ayuda incondicional. Gracias Sol por ayudarme a cumplir un sueño

A mi hijo Timoteo, por traer tantas alegrias durante este proceso de tesis

A mis padres, Rafael y Ana, las personas que me enseñaron el valor del esfuerzo, la constancia y el buen hacer

AGRADECIMIENTOS

A Dios por la opurtunidad de crecer profesionalmente. Seguiré confiando en su favor

Mi más sincero agradecimiento a los profesores Dr. José Luis Lupiáñez Gómez y Dr. Isidoro Segovia Alex por guiarme durante este proceso de tesis doctoral. Gracias por sus valiosos aportes, orientaciones y ánimo para concluir esta tesis doctoral. Gracias porque desde que inicie mis estudios de Máster conté con su apoyo, paciencia, experiencia y la mejor de sus voluntades. Les estaré agradecido siempre

A mis amigos, Landy, Charis, David y Megan, por su apoyo, ánimo y compañía. Gracias por su paciencia y comprensión al posponer tantas actividades juntos

Al Colegio Científico de Costa Rica, Sede Universidad Nacional, Regional Brunca por abrir sus puertas y brindarme la oportunidad de realizar este estudio de tesis doctoral

A los estudiantes que participaron en este estudio.

A Junta de Becas de la Universidad Nacional Costa Rica, por el aporte económico brindado para la realización de mis estudios de doctorado.

A las autoridades de la Universidad Nacional, Sede Regional Brunca, Msc. José Luis Díaz Naranjo y Yalile Jiménez Olivares, por confiar en mí y apoyarme durante la realización de este trabajo de investgación.

ÍNDICE

ANEXOS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDECE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que se presenta en este informe viene motivado por varias razones. Primero, encontramos un interés teórico en profundizar en los procesos de invención de problemas y el talento matemático. Esto se justifica desde la literatura consultada y porque realizamos un estudio exploratorio previo como parte de un trabajo final de Máster en la Universidad de Granada. Por otro lado, se destaca un interés personal del autor de esta tesis por haber laborado más de 14 años en un centro que atiende estudiantes con talento matemático. Durante este tiempo me llamó la atención las capacidades particulares que evidencian estos estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas y que se sitúan por encima de estudiantes promedio.

Además, consideramos que existe una necesidad latente en profundizar en los procesos de caracterización e identificación del talento, que se han realizado generalmente mediante tareas de resolución de problemas. Creemos que las actividades de invención de problemas podrían aportar información relevante, no solo para dichos procesos, sino para su posterior intervención.

Así, en en el contexto de esta investigación se distinguen dos líneas de estudio principales. La primera se relaciona con la invención de problemas por parte de escolares y la segunda se refiere al talento matemático. Ambos temas han despertado el interés de investigadores y educadores matemáticos como queda reflejado en abundantes publicaciones, reuniones científicas e informes dedicados a estos dos tópicos.

Con respecto a la invención de problemas, se constata que es una línea de investigación que surge de estudios realizados sobre la resolución de problemas, de tal manera que es reconocida como una actividad relevante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes. En este sentido, se considera que las tareas de invención de problemas desarrollan el pensamiento matemático y creativo, disminuyen la ansiedad hacia las matemáticas y mejoran los procesos de resolución de problemas y la disposición de los estudiantes hacia la disciplina. Así mismo, puede ser empleada para estudiar niños con talento matemático, observar la comprensión que tienen los estudiantes de un determinado concepto, así como dar un punto de vista sobre cómo manejan y estructuran su propio conocimiento matemático.

Además, quienes defienden este tipo de actividades afirman que corresponde a una actividad cognitivamente más compleja que resolver problemas, ya que durante este proceso los estudiantes alcanzan niveles de reflexión complejos, evidenciando sus conocimientos, habilidades y experiencias matemáticas previas. No obstante, sigue siendo una práctica poco habitual en clases de matemática, debido al desconocimiento por parte del docente de estrategias adecuadas para implementar y evaluar este tipo de tareas.

En relación con el talento matemático, la literatura especializada coincide en que este tipo de estudiantes tienen unas aptitudes y destrezas hacia las matemáticas que los diferencian de los sujetos con inteligencia media y que les permite realizar con mayor éxito tareas en esta disciplina. Además, se coincide en la necesidad de una identificación y caracterización de estudiantes con talento, que aporte información para una respuesta educativa pertinente a las necesidades específicas que éstos tienen, evitando así los efectos negativos por inadecuación, desinterés o incluso dificultades en el aprendizaje.

A pesar de reconocer que estos alumnos requieren de una atención individualizada y de considerarlos como estudiantes con necesidades educativas especiales, los sistemas educativos se centran en atender a aquellos que presentan problemas de aprendizaje, olvidando cubrir las demandas educativas de los estudiantes con talento, impidiendo el desarrollo pleno de sus características y capacidades.

Costa Rica no es ajeno a esta problemática, ya que las adecuaciones curriculares dadas en la educación pública costarricense son generalmente para estudiantes que presentan bajo rendimiento académico en esta disciplina. No obstante, se han realizado algunos esfuerzos a nivel político que buscan atender la problemática educativa que éstos enfrentan. Al respecto se puede citar la Ley para la Promoción de la Alta Dotación, Talentos y Creatividad en el Sistema Educativo Costarricense, que persigue la atención eficaz de los estudiantes con altas capacidades. Además, se creó el sistema de Colegios Científicos, que está conformado por nueve instituciones de educación secundaria ubicadas en diferentes regiones del país, cuyo propósito es fomentar y desarrollar el talento en el área científica (Matemática, Biología, Física y Química), de 30 estudiantes durante dos años lectivos.

Como queda de manifiesto, tanto la invención de problemas como el talento matemático son de interés para la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Sin embargo, existen pocos estudios que relacionen ambos tópicos, de manera que pongan de manifiesto las características particulares que presentan los estudiantes con talento cuando resuelven tareas de este tipo.

Por tanto, tomando en cuenta la riqueza que aporta las actividades de invención de problemas como actividad matemática y la necesidad de profundizar en el estudio del talento matemático, específicamente en la caracterización y su identificación, nos centramos en caracterizar la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante un instrumento de invención de problemas construido en este estudio y compararlo con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público estándar ante el mismo instrumento. Además, nos interesa estudiar el uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento matemático.

Con este proyecto de investigación se pretende aportar información relacionada con los procesos de invención de problemas con estudiantes con talento matemático, así como elementos que indiquen el uso de este tipo de tareas como complemento en la identificación de estos estudiantes. Además, se pretente mostrar diferentes situaciones y estrategias de invención de problemas que puedan utilizar los docentes en clases, con la intención de potenciar y fortalecer las habilidades matemáticas de los estudiantes, así como disminuir algunos problemas asociados a la enseñanza de esta disciplina. Así mismo, se quiere contribuir con una serie de variables de estudio que podrían ser consideradas en investigaciones posteriores, para definir estrategias que permitan valorar las producciones de estudiantes ante este tipo de tareas.

Este estudio se realizó en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía y se enmarca dentro de las líneas de investigación de Pensamiento Numérico y Resolución de Problemas

En este grupo se han realizado estudios relacionados con el tema abordado en esta tesis doctoral.Con respecto a la invención de problemas, se puede mencionar la investigación de Cázares (2000), quien se centró en establecer niveles de desarrollo evolutivo en la competencia aritmética de un grupo de estudiantes. Luque (2004) analizó el conocimiento y comprensión sobre las fracciones que evidenciaron un grupo de estudiantes de secundaria cuando inventaron problemas. De igual forma, Ayllón (2004) usó este tipo de actividades para conocer el significado, diferentes usos y contextos que un grupo de profesores de educación primaria dan a tres tipos de números: naturales, enteros negativos y racionales. Espinoza (2011) empleó tareas de invención de problemas para caracterizar la actuación de un grupo de estudiantes con talento matemático.

Más recientemente, Ayllón (2012) estudió la capacidad de estudiantes de primaria para inventar y resolver problemas, sus creencias sobre lo que es un problema y los elementos que consideran que ha de tener para que sea difícil. Por último, Fernández (2018) utilizó este tipo de actividades para evaluar el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que tienen un grupo de estudiantes de secundaria.

En cuanto al talento matemático, Benavides (2008) caracterizó un grupo de estudiantes considerados con talento matemático mediante tareas de resolución de problemas de estructura multiplicativa. Zúñiga (2009) analizó el instrumento que fue empleado para seleccionar niños con talento que ingresaron al proyecto Estalmat Andalucía. Ramírez (2012) analizó la capacidad de visualización puesta en juego por estudiantes con talento matemático durante tres sesiones de enriquecimiento curricular.

El infome de la investigación se divide en cinco capítulos.

En el primer capítulo se expone el planteamiento del problema que incluye elementos relacionados con la invención de problemas como actividad escolar, la problemática educativa de los sujetos con talento matemático, así como la caracterización e identificación de este tipo de estudiantes. Además, se muestra una descripción de estudios previos que relacionan estos dos temas de investigación. Por último, se presenta la descripción del problema a investigar, las preguntas de investigación y los objetivos que nos proponemos.

En el capítulo 2 se abarca el marco teórico en el que fundamentamos la investigación. Éste incluye una revisión de literatura relacionada con tres partes bien diferenciadas: la invención de problemas, los problemas matemáticos y el talento matemático. En el primero se indaga la conceptualización, clasificación y evaluación de tareas de invención de problemas, así como los usos y bondades de este tipo de actividades en clases de matemática. En el segundo se aborda la conceptualización de problema matemático y las variables de estudio que son de interés en nuestra investigación. Por último, se estudia la concepción de talento matemático y los mecanismos de identificación de este tipo de estudiantes. Además, se hace una revisión sobre las características del talento matemático asociadas a la invención de problemas.

En el tercer capítulo se describe la metodología empleada, detallando el tipo de investigación en el cual se enmarca el estudio, los sujetos, el diseño de la investigación, las categorías de análisis, el esquema empleado para valorar las producciones de los estudiantes y el proceso para caracterizar el talento matemático.

Los resultados obtenidos en la investigación se presentan en el capítulo 4. En éste se presentan las características generales de los problemas inventados por ambos grupos de estudiantes, el análisis de los resultados según las categorías de análisis definidas, así como la fiabilidad y validez del instrumento.

Finalmente, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones obtenidas en esta investigación respondiendo a las interrogantes planteadas. Ademas, se describen las limitaciones del estudio, algunas líneas abiertas y una reflexión docente derivada de la experiencia de realizar este proyecto de investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presenta el problema de investigación abordado en este trabajo que implica dos campos de estudio: la invención de problemas y los estudiantes con talento matemático. Para ello se describen investigaciones previas y posicionamientos teóricos relacionados con la invención de problemas como actividad escolar, la problemática educativa que enfrentan los sujetos con talento matemático y la caracterización e identificación de este tipo de estudiantes. Seguidamente, se describen los estudios previos que constituyen referentes sobre la actuación de estudiantes con talento ante tareas de invención de problemas. Por último, se expone el problema abordado, los objetivos que dirigen este estudio y las preguntas de investigación.

A continuación, se detallan los elementos descritos en cada uno de los temas mencionados.

1.1 La invención de problemas como actividad escolar

La resolución de problemas ha sido históricamente un componente importante del currículo escolar, un gran objetivo de instrucción y una línea relevante de investigación en la Educación Matemática. A partir de los estudios sobre este tema surge la invención de problemas como tema de investigación (Castro, 2008) y es tal que algunos distinguidos investigadores en Educación Matemática la reconocen como una actividad importante dentro de la experiencia matemática de cualquier estudiante (Brown & Walter, 1990; Ellerton, 1986; Krutetskii, 1976).

De hecho, quienes defienden este tipo de actividades sostienen que es una tarea cognitivamente más difícil que resolver problemas (Mestre, 2002; citado por Kaba & Şengül, 2016), ya que promueve la participación de los estudiantes en una auténtica actividad matemática, que los reta a encontrar muchos problemas, métodos, soluciones y poner en práctica su creatividad (Silver y Cai, 2005). Así mismo, cuando un escolar inventa problemas alcanza niveles de reflexión complejos, que le obligan a emplear sus conocimientos, habilidades y experiencias matemáticas previas, llevándolo a una etapa de razonamiento donde es posible construir el conocimiento matemático (Ayllón & Gomez, 2014).

Kilpatrick (1987) también señala el valor que tiene este tipo de actividad en la enseñanza de la matemática y considera que corresponde a una tarea relevante en la educación matemática en todos los niveles educativos, debido a la riqueza de relaciones que ésta proporciona.

Más recientemente, Bonotto (2013) resalta el papel prepondarente que tiene la invención de problemas como enfoque de instrucción, al afimar que:

> El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática, que adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental. (p. 53)

En este sentido, algunos autores ponen de manifiesto las bondades que aporta este tipo de actividades en clases de matemática (Ayllón, Gallego & Gómez, 2016; Ayllón & Gomez, 2014; Castro, 2011; Espinoza, Lupiáñez & Segovia, 2014). Entre ellas se puede mencionar que disminuye la ansiedad que sienten los estudiantes hacia esta disciplina, desarrolla y mejora las habilidades de resolución de problemas, corrige algunos errores matemáticos que comenten con frecuencia los estudiantes, desarrolla la creatividad y el conocimiento matemático y crea un mejor ambiente en el salón de clase. Además, es una herramienta que permite estudiar niños con talento matemático, observar la comprensión que tiene de un determinado concepto matemático, así como dar un punto de vista sobre cómo los estudiantes manejan y estructuran su propio conocimiento matemático.

Así mismo, Noda (2000; citado en Ayllón, Ballesta-Claver & Gomez, 2016) afirma que tanto las actividades de invención y resolución de problemas son fundamentales para la formación matemática del estudiante, ya que fortalece la construcción del conocimiento matemático, constituyendo una acción cognitiva esencial en la práctica educativa.

Por otra parte, Singer, Ellerton & Cai (2013) sostienen que durante mucho tiempo la resolución de problemas ha sido reconocida como un objetivo relevante; sin embargo, ha llegado el momento de que la invención de problemas tome también un lugar preponderante en los planes de estudio y por tanto en las clases de Matemática.

Al respecto, los estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas hacen referencia a la importancia de incluir este tipo de actividades en el currículo de matemática y mencionan que los estudiantes deben tener la oportunidad de formular sus propios problemas a partir de situaciones dadas previamente o a través de la modificación de un enunciado inicial (NCTM, 1991, 2000). De igual forma, su uso le permite a los estudiantes discutir una amplia gama de ideas y considerar el significado del problema y no solo centrarse en la búsqueda de su solución (Brown & Walter, 1993).

En Costa Rica, los programas vigentes de estudio para la enseñanza de la matemática también sugieren la incorporación de este tipo de actividades en clases de matemática, ya que proponen la resolución de problemas en contextos reales como estrategia metodológica principal y el planteamiento de problemas como uno de los procesos matemáticos centrales de esta actividad (MEP, 2012). Por ejemplo, para el contenido de cálculo y estimaciones recomiendan "resolver y plantear problemas en los que se utilicen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división" (MEP, 2012, p. 98). Para ello dan algunas indicaciones puntuales como "proponer al estudiante plantear un problema con las siguientes operaciones: 3x1500=4500" (MEP, 2012, p. 99).

De igual forma, para el contenido de cuerpos sólidos sugieren "plantear problemas con base en imágenes de cuerpos sólidos" (MEP, 2012, p. 115) y como indicación puntual se menciona que "es importante que cada estudiante utilice los conocimientos adquiridos en el planteamiento de problemas. Se le debe proporcionar cierta información para que, de forma creativa, proponga algún problema o ejercicio que utilice la información dada" (MEP, 2012, p. 115).

La invención de problemas también ha sido objeto de discusión en importantes congresos de Educación Matemática. Por ejemplo, en el PME 33 se creó un grupo llamado "Problem posing in mathematics Learning: Establishing a Theoretical Base for Research". En dicho grupo se abordaron aspectos como la invención de problemas como un componente integral en las matemáticas escolares, los contrastes entre los componentes cognitivos de la invención de problemas y la resolución de problemas en el pensamiento matemático; la invención de problemas y el discurso en las clases de matemáticas; los procesos de invención de problemas y su relación con la creatividad (Singer et al., 2013).

Esta discusión continuó en el PME 35 realizado en el 2011, con un foro de investigación titulado “Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: a Research Agenda”, en el cual se promovió una mayor discusión e investigación sobre las formas en que la invención de problemas puede llegar a ser un componente más natural de la clase de matemática en todos los niveles educativos.

Lamentablemente, los estudios relacionados con este tema son recientes y hace poco más de dos décadas que la invención de problemas recibe más atención como tema de investigación (Ayllón, Gallego, et al., 2016). Además, los estudios sobre este tópico son menos frecuentes y presentan menor trayectoria investigadora que los realizados en el campo de la resolución de problemas, por lo que su producción es mucho menor (Malaspina, 2015). Así mismo, el intenvar problemas no es una actividad habitual en clases de matemática, ni recibe la misma atención en los currículos escolares de esta disciplina (Ramírez, 2006). Esto ha provocado que se conozca relativamente poco sobre los procesos cognitivos implicados en los procesos de invención de problemas (Cai, et al., 2013; citado en Fernández & Barbarán, 2015), así como las formas de emplear este tipo de tareas o recomendaciones que ayuden a los docentes a incorporarlas en sus clases (Ayllón, Ballesta-Claver, et al., 2016).

Así, en este apartado queda de manifiesto la importancia que tiene la invención de problemas como actividad escolar y tópico de investigación en Educación Matemática. Además, reconocemos que es un tema poco abordado, tanto desde la investigación, como en clases de matemática y en los currículos escolares por lo que merece una mayor atención de parte de los investigadores y educadores en esta disciplina, así como de las instituciones encargadas de diseñar e implementar los currículos escolares.

En el siguiente apartado se aborda la problemática educativa que presentan los sujetos con talento en matemática y que corresponde al segundo campo de estudio implicado en esta investigación.

1.2 Problemática educativa de los sujetos con talento matemático

Tradicionalmente se ha prestado atención diferenciada sólo a aquellos estudiantes que muestran alguna necesidad educativa especial. Sin embargo, actualmente existe un mayor reconocimiento respecto a que todos los estudiantes presentan características especiales, por lo que la enseñanza tiene que ajustarse a las necesidades específicas de cada uno, atendiendo de esta forma a la diversidad que presenta el sistema educativo (Benavides, Maz, Castro & Blanco, 2004).

En este sentido, distintas organizaciones implicadas en la educación han reclamado la importancia de atender a esta diversidad. Al respecto, Benavides (2008) afirma que la UNESCO ha sido sensible sobre este tema, al considerar que cada niño tiene características, intereses y capacidades distintas, por lo que se debe diseñar programas que tomen en cuenta estas diferencias. De igual forma la NCTM en los estándares considera a los alumnos con talento dentro de las necesidades educativas especiales (Ramírez, Flores & Castro, 2010).

Una de las problemáticas que enfrentan los sujetos con talento es la respuesta homogénea que ofrecen los sistemas educativos, creando una barrera que impide el desarrollo pleno de sus características y capacidades (Benavides et al., 2004). En este sentido Blanco, Rios & Benavides (2004) afirman que a pesar de que existe un necesidad de velar por las problema de este tipo de estudiantes, las demandas educativas de estos alumnos no son suficientemente atendidas por los sistemas educativos, que se centran más en los estudiantes que presentan problemas de aprendizaje. Además, los estudiantes con talento requieren de una atención diferenciada por parte de la escuela, ya que los programas no responden a sus capacidades e intereses (Sánchez, 2003; citado en Benavides, 2008).

Por tanto, no es extraño que uno de los grupos más perjudicados en este sentido sean los estudiantes con mayor capacidad, ya que se cree erróneamente que les irá bien sin necesidad de mayores recursos o ajustes en los procesos de enseñanza (Benavides et al., 2004). De hecho, "los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas" (NCTM, 1980, p. 18, citado en Castro, 2008).

Además, obviar estos ajustes provocaría que este tipo de estudiantes no desarrollen plenamente sus talentos y potencialidades o bien presenten dificultades de aprendizaje, en una escuela donde las exigencias son las mismas para todos (Machado, 2004). Al respecto, Blanco, et al. (2004) recomiendan que las instituciones aborden esta problemática de manera que promuevan el desarrollo y aprendizaje de los estudiantes con talento excepcional.

Otro aspecto preocupante es el hecho de que los estudiantes con talento pueden pasar inadvertidos por el profesor y no sean atendidos correctamente por el sistema educativo, ya que algunos de ellos no demuestran logros académicos, entusiasmo hacia los programas de matemática, ni consiguen las mejores calificaciones en esta disciplina. No obstante, presentan otros indicios que sugieren alta capacidad hacia las matemáticas (Miller, 1990, citado en Ramírez, 2012).

También existe la problemática de que el profesorado no tiene la preparación adecuada para detectar estudiantes con talento, ni para ajustar los programas de acuerdo con las características que éstos presentan (Castro, Ruiz-Hidalgo & Castro-Rodríguez, 2015). En este sentido, en un foro realizado en el PME 2009 se discutió sobre estrategias para desarrollar en el docente sus conocimientos, creencias y habilidades para prepararlos para la enseñanza de niños con talento (Ramírez, 2012).

De igual forma, algunas investigaciones ponen de manifiesto la importancia que tiene la formación del profesorado para la correcta identificación y respuesta educativa de este colectivo. Por ejemplo, Tourón, Fernández & Reyero (2002) afirman que las actitudes hacia la alta capacidad intelectual son diferentes entre los profesores que recibieron una formación específica en este tema y los que no la habían recibido. Peña, Martínez, Velázquez, Barriales & López (2003) indican que los profesores tienen dificultades para identificar algunas características que presentan estos alumnos de acuerdo con la literatura científica. Así mismo, Fonseca (2016) afirma que la poca preparación que tienen los docentes sobre la atención de este tipo de estudiante hace que éstos sientan una incertidumbre al desconocer los estudios realizados a esta población estudiantil, las características que los distinguen y su implicaciones curriculares y administrativas.

Más recientemente Hoth, et al. (2017) estudiaron la relación entre los conocimientos profesionales que adquirieron un grupo de profesores de primaria durante su formación docente y las habilidades para identificar y apoyar matemáticamente a estudiantes creativos y de alto rendimiento. Los análisis revelaron que los docentes que poseen dificultades en el razonamiento lógico y la comprensión de aspectos estructurales de las matemáticas, tienen dificultades para identificar y apoyar a los estudiantes creativos y de alto rendimiento.

Costa Rica no es ajeno a esta problemática, ya que la atención a la diversidad ha estado ligada a la educación especial, dejando de lado a niños que con alta dotación, talentosos o creativos (Fonseca, 2016). De igual forma, se han desarrollado en el país diferentes programas, proyectos, investigaciones y asesorías para atender estudiantes con alguna dificultad de aprendizaje, olvidando a aquellos que presentan aptitudes especiales para aprender (Díaz, Aleman & Hernández, 2013). Esta misma autora sostiene que las adecuaciones curriculares dada en la educación pública costarricense son para estudiantes que presentan alguna dificultad al aprender matemática, dejando de lado a los estudiantes con talento en esta disciplina. Sin embargo, ha realizado algunos esfuerzos por brindarle a esta población respuestas educativas diferenciadas.

Al respecto se cuenta con la promulgación de la Ley para la Promoción de la Alta Dotación, Talentos y Creatividad en el Sistema Educativo Costarricense (Ley 8899-2010) y su Reglamento (N.38808), emitido por la Presidencia de la República el 06 de enero de 2015. Además, el artículo 62 del Código de la Niñez y la Adolescencia, sobre el derecho a la educación especial, el cual menciona que "las personas con un potencial intelectual superior al normal o con algún grado de discapacidad, tendrán el derecho de recibir atención especial en los centros educativos, para adecuar los métodos de enseñanza a sus necesidades particulares" (p. 14).

El inconveniente con respecto a estas leyes, es que existe una incertidumbre por parte de los docentes, administrativos y padres de familia sobre la aplicación de dicha iniciativa en las aulas, dada la falta de preparación académica, asesoría y capacitación al respecto (Fonseca, 2016).

Así, queda de manifiesto que los estudiantes con talento han sido uno de los últimos grupos con necesidades educativas especiales en ser atendidos por los sistemas educativos, los cuales han limitado su desarrollo, aprendizaje y fortalecimiento de sus capacidades. Además, existe una respuesta homogénea o estandarizada por parte de los centros para atender las necesidades educativas especiales, poniendo mayor atención a los estudiantes con dificultad de aprendizaje y dejando de lado aquellos con altas capacidades.

De igual forma, existe una falta de formación docente que les facilite la detección e intervención de este tipo de estudiantes en sus clases. Para ello se requiere un currículum más flexible y pautas a seguir para desarrollar en dichos estudiantes sus capacidades.

Ante esto, consideramos relevante investigar más a fondo y mediante tareas distintas a las de resolución de problemas o test estandarizados, las características particulares que presentan estos estudiantes de manera que faciliten su identificación. Además, es necesario aportar herramientas de detección del talento que complemente la información que aportan las ya existentes. Por último, consideramos conveniente estudiar actividades que promuevan, potencien y fortalezcan las habilidades que poseen este tipo de estudiantes, de manera que sean atendidos de una mejor manera.

1.3 Caracterización e identificación del talento matemático

En la actualidad, la atención de niños superdotados o con talento va adquiriendo importancia tanto en los diferentes currículos escolares como en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este interés también se refleja en la conformación de grupos de discusión en Congresos de relevancia en el área de la Educación Matemática como es el ICME 10 (TSG4) o el ICME 11 (TSG6) (Benavides, 2008).

Esta misma autora afirma que estudiar las características particulares que poseen estos estudiantes es una de las líneas de investigación que se han desarrollado alrededor del tema. De hecho, Krutetskii (1976) es quizás uno de los primeros investigadores que realizó un estudio sistemático en este sentido al observar los procesos cognitivos de 192 niños entre los 6 y 16 años ante una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii sostiene que este tipo de estudiante no sólo tienen mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma cualitativamente diferente sobre las matemáticas y poseen algunas habilidades de resolución de problemas matemáticos de los adultos.

De igual forma García (2014) argumenta que desde edades escolares los niños con talento presentan características que los diferencian de los demás, como es el mostrarse activos, persistentes, flexibles y curiosos hacia el aprendizaje. Además, poseen una excelente rapidez en la captación de conceptos matemáticos complejos y abstractos. González & Domingues (2015) también argumentan que la creatividad, la motivación o el pensamiento divergente son cualidades que presentan este tipo de estudiantes.

Otros autores se han ocupado en estudiar el pensamiento de este tipo de estudiantes cuando resuelven tareas de resolución de problemas y concluyen que el razonamiento que muestran es muy diferente de estudiantes ordinarios en términos de velocidad y profundidad (Kesan, et al., 2010). Al respecto, Banfiel (2005) afirma que estos estudiantes son capaces de: a) resolver problemas complejos; b) analizar conceptos y procesos matemáticos más rápido que otros estudiantes; c) realizar un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales; d) organizar datos para observar patrones o relaciones; e) verbalizar conceptos, procesos y soluciones matemáticas y f) analizar el problema considerando varias alternativas de solución.

Greenes (1981) también recoge algunas particularidades que presentan los estudiantes con talento en matemática, entre las que se destacan la formulación espontánea de problemas, la flexibilidad del manejo de datos, la originalidad de interpretación y la agilidad mental o riqueza de ideas. Por su parte, Freiman (2006) afirma que este tipo de estudiantes se caracterizan por preguntar espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, buscar patrones y relaciones, localizar la clave de los problemas, producir ideas originales, valiosas y extensas, etc.

Por último, Reyes-Santander & Karg (2009) proponen que los estudiantes aventajados en matemática presentan dominio de campos del conocimiento matemático, muestran persistencia y perseverancia en actividades matemáticas que le interesan y de generación metacognitiva, así como producir resultados generales.

En cuanto a la identificación del talento matemático, durante décadas se han diagnosticado a este grupo de sujetos a través de instrumentos objetivos como las pruebas psicométricas o estandarizadas, test de personalidad y las de resolución de problemas matemáticos, que evidencian que los estudiantes con talento matemático interpretan esta asignatura de un modo genuino y único (Tojo, Fernández, Castaño & Barreiros, 2008). También se han empleado técnicas subjetivas o informales que se basan generalmente en la observación de docentes o padres de familia. Estas proporcionan información relacionada con el desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Algunos ejemplos de este tipo de pruebas son los informes realizados por padres o profesores, nominaciones de los compañeros o auto informes.

De acuerdo con Rodríguez (2004), las pruebas objetivas presentan ventajas e inconvenientes. Por ejemplo, argumenta que los test de inteligencia son fiables para diferenciar las características del talento, pero presentan un alto costo con respecto al tiempo y grado de especialización de quien lo aplica. También sostiene que los test de aptitudes son muy importantes para la identificación de los talentos específicos, pero tienen limitaciones similares a los de inteligencia general. Los test de personalidad son relevantes en el caso de talentos con inadaptación escolar, pero requiere una alta especialización en su aplicación y las pruebas de creatividad son imprescindibles para evaluar el pensamiento divergente, la originalidad y flexibilidad del pensamiento. En cuanto a las pruebas subjetivas, Benavides (2008) afirma que éstas pueden aportar datos muy relevantes, pero que pueden ser irregulares.

Por tanto, queda de manifiesto que la identificación del talento matemático no debería centrarse exclusivamente en la aplicación de test basados en el cálculo numérico o mediante tareas de resolución de problemas. También hay que tomar en cuenta otros aspectos del contenido, que lleven al sujeto a mostrar su capacidad de razonar matemáticamente, a partir del análisis de la calidad de sus respuestas a determinadas tareas (García, 2014).

En este sentido, en el proceso de identificación de niños con talento debería emplearse de forma complementaria el uso de métodos cuantitativos y cualitativos (Benavides, 2008), ya que existe un baja relación entre los test utilizados para evaluar la aptitud matemática y las características fundamentales del talento matemático por ejemplo, las citadas en el estudio de Greenes (1986). Sin embargo, en los últimos años se han realizado esfuerzos en elaborar pruebas de detección de este tipo de estudiantes e incluso de dotarles de una atención específica, aunque fuera del horario escolar (González & Domingues, 2015).

En este sentido, surgen las tareas de invención de problemas como una actividad cognitiva que permite a los estudiantes evidenciar los contenidos, habilidades y destrezas aprendidas, así como su nivel de razonamiento y creatividad (Espinoza, 2011; Krutetskii, 1976). De hecho, algunos autores proponen emplear este tipo de tareas como una herramienta para identificar estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986; Espinoza, 2011; Keşan et al., 2010; Krutetskii, 1976). A continuación, se presenta una revisión de estudios previos que han empleado la invención de problemas para estudiar niños con talento.

1.4 Estudios previos sobre invención de problemas y estudiantes con talento

De acuerdo con la revisión de literatura, se constata que varios autores han caracterizado la actuación de estudiantes con talento matemático, generalmente, ante tareas de resolución de problemas (Benavides, 2008), de manera que son menos los estudios que centran su atención en estudiar este tipo de estudiantes ante tareas de invención de problemas (Espinoza, 2011).

Al respecto se pueden identificar tres grandes prioridades: a) estudiar las estrategias de invención de problemas que emplean los estudiantes con talento matemático (Pelczer, Voica & Gamboa, 2008); b) explorar el efecto de la instrucción de invención de problemas sobre el desarrollo de habilidades matemáticas de estos estudiantes o su relación con los procesos de resolución de problemas y c) estudiar si los estudiantes con talento matemático tienen mayor capacidad de invención de problemas que sus compañeros menos hábiles en matemática.

En relación con la primera, Pelczer, et al. (2008) analizaron las estrategias de invención de problemas que emplearon 21 estudiantes con talento matemático. Estos autores les propusieron a los escolares inventar tres problemas, uno fácil, otro de dificultad media y otro difícil. Los resultados de la investigación muestran que los estudiantes tuvieron un mejor rendimiento en el planteamiento de problemas fáciles; mientras que en los difíciles inventaron enunciados que incluían algún conocimiento complejo que no siempre dominaban, por lo que el número de problemas incorrectos es mayor que en los demás casos. Además, observaron que una gran cantidad de problemas difíciles eran no resolubles.

También observaron que los estudiantes a partir de una idea inicial reúnen los conocimientos y experiencias para obtener el problema buscado; sin embargo, en el proceso necesitaron hacer cambios para cumplir con los requisitos de un problema matemático. El estudio también concluye que los estudiantes afirman que la complejidad de un problema radica en la complejidad del conocimiento requerido para la solución, su propio conocimiento y el tiempo para resolverlo.

Arikan & Unal (2015) analizaron el efecto de las destrezas en resolución de problemas empleando múltiples métodos sobre las habilidades de invención de problemas de 105 estudiantes de séptimo grado, 20 de ellos considerados con talento y 85 no identificados como tal. Además, evaluaron si la posesión de tales habilidades puede predecir el talento o afectar las habilidades de invención de problemas. De acuerdo con los autores, una de las preguntas presentes en la literatura es determinar si los estudiantes que son capaces de encontrar y producir diferentes alternativas para resolver un problema también tienen éxito para inventar problemas. Al respecto concluyen que existe una fuerte correlación entre las formas distintas de resolver un problema y las habilidades de invención de problemas, por lo que aquellos estudiantes que resuelven problemas de múltiples formas también tienen más éxito en la invención de problemas. El estudio también concluye que los estudiantes no identificados con talento tienen dificultades para inventar problemas por su falta de experiencia.

Con respecto a la segunda prioridad, Keşan et al., (2010) estudiaron el efecto de las actividades de invención de problemas en el desarrollo de habilidades matemáticas de 40 estudiantes con talento matemático divididos en dos grupos, de manera que sólo uno de ellos recibió instrucción en invención de problemas.

En la investigación se aplicó como pretest el test de habilidad en resolución de problemas matemáticos (MPSAT). Luego se aplicó nuevamente como un postest, con el propósito de medir el efecto de la instrucción de invención de problemas sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas de estudiantes con talento matemático.

Los resultados muestran que antes de la instrucción no hay diferencias significativas entre las medias de ambos grupos (control y experimental); sin embargo, sí se presentaron diferencias significativas entre las medias después de la instrucción de invención de problemas en el postest. Los investigadores concluyen que hay diferencias significativas entre las notas medias del test MPSAT para los estudiantes del grupo experimental, resultando así que las actividades de invención de problemas son efectivas en su rendimiento, especialmente para tareas no rutinarias y de composición abierta.

Con respecto a los estudios que analizan la capacidad de invención de problemas de estudiantes con talento, Krutetskii (1976) le pidió a un grupo de este tipo de estudiantes que inventaran un enunciado a partir de un problema que no contenía la pregunta. Su estudio concluye que los estudiantes tuvieron facilidad para observar la estructura de los problemas matemáticos, así como aquellos enunciados que surgen de una situación dada.

Ellerton (1986) también propuso este tipo de actividades a dos grupos de estudiantes con mayor y menor habilidad hacia la matemática. Los resultados muestran que los problemas inventados por los estudiantes más hábiles implican mayor dificultad de cálculo, presentan mayor cantidad de operaciones, implican un sistema numérico más complejo y utilizan el lenguaje matemático con mayor fluidez que sus compañeros menos capaces. De igual forma, sostienen que los estudiantes con mayor habilidad planifican previamente sus problemas, ya que éstos presentan mayor consistencia, por lo que responden correctamente sus propios problemas con mayor frecuencia que los de menos habilidad.

Por su parte, Silver & Cai (1996) reportan que los estudiantes con mayor habilidad matemática generan no solo más problemas matemáticos, sino que también más problemas matemáticos complejos, ya que implicaban una mayor cantidad de relaciones semánticas. Además, confirman que el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas tuvo una alta correlación con su rendimiento en el planteamiento de problemas.

En el estudio de Espinoza (2011) se propusieron dos tareas de invención de problemas a dos grupos de estudiantes, uno considerado con talento matemático que participaban del proyecto ESTALMAT-Andalucía y otro conformado por estudiantes de un colegio público estándar de Salobreña, España. Los resultados muestran que los problemas planteados por estudiantes con talento presentan una mayor riqueza en cuanto a la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa, tipo de número, cantidad de procesos y pasos implicados en la solución del problema que sus compañeros del grupo estándar. Además, se encontraron diferencias en el tipo de estructura semántica y en la cantidad de relaciones semánticas implicadas en la solución del problema. El estudio también concluye que las producciones de los estudiantes con talento tenían la sensación de ser más difíciles de resolver, ya que al leer el enunciado no se identificaba de forma inmediata un procedimiento para resolverlos.

Por su parte, en el estudio de Singer, Voica & Sarivan (2015) se encontró que las situaciones de invención de problemas promueven que los estudiantes con talento matemático desarrollen marcos cognitivos que los hace cautelosos en el cambio de parámetros en sus nuevos problemas, incluso cuando ellos hacen generalizaciones interesantes. La capacidad de los estudiantes para generar problemas coherentes y consistentes en el contexto de modificación de problemas podría indicar la existencia de una estrategia de generalización, que parece ser específica a la creatividad matemática, diferenciándola de manifestaciones creativas en otros dominios.

Más recientemente, Scattarética (2017) caracterizó los problemas multiplicativos inventados por 29 estudiantes con talento académico de Sexto Año Básico, a partir de su contexto y complejidad matemática propuesto en el programa PISA (OCDE 2006). Con respecto al contexto, concluye que los estudiantes prefirieron plantear enunciados implicados en un contexto educativo/laboral (48%), seguido de un contexto personal (33%), mientras que el restante 9% son de un contexto social. De esta forma, los estudiantes no plantearon problemas en un contexto científico. En cuanto a la complejidad matemática de las producciones, la autora concluye que una gran cantidad de enunciados presentaron una complejidad baja, ya que son problemas de reproducción (82%); mientras que los restantes corresponden a enunciados de conexión (18%). Así, ningún problema fue catalogado como de reflexión, que corresponde al tipo más complejo. También concluye que los estudiantes prefirieron inventar problemas directos, sin establecer gran número de relaciones entre las cantidades y con un lenguaje simple con pocos términos propios del lenguaje matemático.

Manuel & Freiman (2017) desafiaron a un grupo de estudiantes con talento matemático a inventar un problema que luego se publicarían en una página web. El estudio se centró en analizar los problemas en términos de su contenido matemático, contexto y riqueza. Los autores consideran que un problema es rico si es abierto, complejo, está bien definido y es contextualizado. Para valorar los 23 problemas inventados por los estudiantes, elaboraron una rúbrica con 8 indicadores, de modo que el valor de riqueza de un problema podía variar de 0 a 8.

Según los autores la mayoría de los problemas se centraron en conceptos aritméticos que podrían ser resueltos mediante las cuatro operaciones básicas. Además, resultó que 14 problemas son de un contexto cercano a la vida diaria de los estudiantes, siete son de un contexto futuro a los estudiantes o de su vida adulta y dos están relacionados con una situación ficticia.

Con respecto a la riqueza de los problemas, esta varió de 2-6, con una media de 3,39 y desviación estándar de 1,2. De los 23 problemas creados, siete son de un nivel de riqueza bajo (calificación de 2), 11 presentaban una riqueza media (calificación de 3-4) y cinco problemas fueron catalogados de riqueza alta (calificación 5-6). También resultó que 22 de los problemas fueron contextualizados, 19 se podrían resolver empleando múltiples estrategias y 19 problemas se resolvían empleando múltiples pasos.

Como se puede apreciar, algunos estudios ponen de manifiesto las particularidades que presentan los estudiantes con talento o sobresalientes en el área de la matemática cuando inventan problemas. Sin embargo, no son tan numerosos como los realizados en resolución de problemas, donde existe una extensa lista de características que presentan este tipo de estudiantes cuando resuelven tareas de ese tipo.

Así, una vez abordada la invención de problemas como actividad escolar y descrita la problemática educativa que presentan los estudiantes con talento matemático, su caracterización e identificación, así como los estudios previos sobre la actuación de este tipo de estudiantes ante tareas de invención de problemas, procedemos a definir el problema de investigación que plantea este estudio.

1.5 Descripción del problema a investigar.

Considerando, a) que las tareas de invención de problemas suponen una actividad cognitiva importante para los estudiantes, la cual es reconocida por diversos autores, b) que documentos curriculares y congresos de relevancia en Educación Matemática sugieren su incorporación como tarea de clase, dada la riqueza que aporta a la experiencia matemática de cualquier estudiante, c) que la literatura constata una necesidad de profundizar en la caracterización e identificación de estudiantes con talento en matemática y d) que los principales instrumentos empleados para ello se han centrado en tareas de resolución de problemas o test estandarizados, planteamos el siguiente problema de investigación.

Caracterizar la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante un instrumento de invención de problemas construido en este estudio y compararla con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público estándar ante el mismo instrumento. De igual forma, la investigación indaga la invención de problemas como una herramienta para identificar estudiantes con talento matemático.

De esta forma, se continúa la línea de trabajo propuesta por Ellerton (1986); Kutetskii (1976); Kesán et al., (2010); Singer, et al. (2015) y Manuel & Freiman (2017), quienes propusieron este tipo de actividades para estudiar niños con talento matemático.

Para ello se elaboró un instrumento conformado por siete tareas que solicitan a los estudiantes inventar problemas matemáticos a partir de diferentes reactivos: una información textual, una imagen, un problema que deben resolver previamente o sólo inventar un problema sin ninguna restricción. En su elaboración se consideró la revisión de literatura relacionada con la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas y las características del talento matemático implicadas en los procesos de invención de problemas. Es importante destacar que las tareas propuestas no se enmarcan dentro de un contenido matemático específico, sino que el estudiante tuvo la libertad de elegir el contenido en el que quería plantear sus problemas.

Además, se definieron seis categorías de análisis y 22 variables de estudio relacionadas con el contexto y la complejidad del problema, el pensamiento metacognitivo y divergente; así como la formulación y reformulación de problemas de gran riqueza.

Nuestro interés de indagar los procesos de invención de problemas por estudiantes con talento matemático, como se ha indicado antes, es la ausencia de investigación sobre este campo de estudio. Al respecto, en 2011 realizamos un primer acercamiento sobre el tema en un trabajo final de máster, donde estudiamos exploratoriamente las características que manifestaron un grupo de estudiantes con talento matemático al resolver dos tareas de invención de problemas aritméticos verbales.

Este trabajo nos permitió conocer exploratoriamente al tema de investigación, por lo que decidimos profundizar en un estudio de tesis doctoral, refinando los instrumentos de investigación, las tareas de planteamiento de problemas y el análisis de las mismas con la intención expresada en el objetivo de investigación. Ante esto consideramos necesario profundizar en los procesos de caracterización de estudiantes con talento matemático, aportando mayor información cualitativa y cuantitativa que pueda integrarse a la toma de decisiones.

De igual forma, es ampliamente aceptado por la comunidad de investigadores de Educación Matemática el potencial que tienen las actividades de invención de problemas, ya que a través de ellas los estudiantes pueden mostrar la comprensión de conceptos y habilidades matemáticas, así como su creatividad al realizar aportes personales.

Por último, se pretende aportar información relevante sobre el uso de la invención de problemas como una herramienta funcional en la identificación de estudiantes con talento matemático, de forma que se tengan más elementos a considerar en la detección y atención oportuna de estos estudiantes.

A continuación, se presentan las preguntas y objetivos de investigación que guiaron este proyecto de estudio.

1.6 Preguntas y objetivos de investigación

En este trabajo nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características presentan los problemas inventados por un grupo de estudiantes considerados con talento matemático cuando se les propone este tipo de tareas?
2. ¿Cuáles son las diferencias entre los problemas planteados por el grupo de estudiantes considerados con talento matemático y un grupo estándar de un colegio público estándar?
3. ¿Cuáles son las diferencias, con respecto a las variables de estudio, de los problemas planteados en cada cuestionario de invención de problemas?
4. ¿Existen diferencias en cuanto a la riqueza de los problemas de ambos grupos?
5. ¿Es posible emplear tareas de invención de problemas para identificar estudiantes con talento matemático?

Estas preguntas fueron concretadas en un objetivo general de investigación y en varios objetivos específicos que se presentan a continuación.

Objetivos de la investigación

La finalidad de esta investigación se puede enunciar en términos del siguiente objetivo general:

Describir y caracterizar la capacidad para inventar problemas que tiene un grupo de estudiantes de secundaria considerados con talento matemático.

Este objetivo general se concreta en los siguientes cuatro objetivos específicos.

1. Fundamentar, diseñar y validar un instrumento de invención de problemas matemáticos para caracterizar estudiantes con talento en matemática.
2. Caracterizar los problemas inventados por un grupo de estudiantes con talento matemático ante las tareas propuestas.
3. Contrastar si el instrumento de invención de problemas es válido como test de identificación del talento matemático.

4. Analizar la riqueza de los problemas planteados por el grupo de estudiantes con talento matemático y constratarlo con la riqueza que presentan las producciones de un colegio público estándar.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este apartado se presentan los referentes teóricos que sustentan esta investigación y que se vinculan con la revisión de literatura de tres áreas bien diferenciadas: la invención de problemas, los problemas matemáticos y el talento matemático. En primera instancia se tratan algunos elementos relacionados con la invención de problemas, su clasificación y diseño. Luego, se describen algunos usos y bondades que tiene este tipo de actividades, así como las estrategias utilizadas para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas. Seguidamente se presentan la conceptualización de problema matemático y algunas variables de estudio que son de interés en nuestra investigación. Por último, se abordan algunos elementos relacionados a los sujetos con talento y especialmente con talento matemático, como es su conceptualización, caracterización y mecanismos de identificación.

2.1. Invención de problemas matemáticos

La actividad de inventar problemas no es nueva, sino que forma parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años (Singer, et al., 2013). Sin embargo, es hasta en las últimas décadas cuando los investigadores en Educación Matemática le prestan mayor atención y la identifican como una línea de investigación (Espinoza, Lupiáñez & Segovia, 2016). Pero ¿en qué consiste este proceso?

La invención de problemas, también conocida en la literatura en inglés como *"problem posing"* (Brown & Walter, 1990; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994), ha sido denominada de varias formas, pero todas ellas hacen referencia al mismo hecho: un sujeto hace o expresa una propuesta personal de enunciado de un problema matemático. Así, se le conoce como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990) o creación de problemas. En este trabajo emplearemos la denominación de invención de problemas.

Para Koichu & Kontorovich (2013) la invención de problemas es el proceso mediante el cual los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos con significado. Ayllón, Castro & Molina (2011) también hacen referencia a este hecho y lo conceptualizan como la acción de producir un enunciado que presente un planteamiento o historia a partir del cual se formulan una o más preguntas que son contestadas tomando en cuenta ciertos datos. Además, el problema inventado debe ser genuino, por lo que no debe ser tomado de otro medio, sino que es producto de los conocimientos que tiene el sujeto.

Otra conceptualización se refiere al hecho de crear un problema nuevo, ya sea por variación o elaboración (Malaspina, 2011). En el primero se inventa un problema nuevo modificando uno de los elementos de un problema previamente dado, mientras que en el segundo se construye un problema a partir de una situación real o una situación imaginada, adecuadamente contextualizada.

También es considerada como la generación de nuevos problemas o la reformulación de problemas dentro del proceso de resolución de un problema, cuando el resolutor se vuelve a plantear el problema para intentar resolverlo de manera más asequible (Silver, Mamona-Downs, Leung & Kenny, 1996).

Esta concepción de invención de problemas coincide con el modelo de Pólya (1979) cuando cuestiona ¿Cómo podemos plantear el problema de manera diferente? ¿Cómo variar el problema descartando parte de la condición? De igual forma, Silver (1994) afirma que si un resolutor tiene dificultad para resolver el problema original, entonces el proceso de invención *"se produce cuando el problema dado es reformulado y personalizado a través del proceso de reformulación. La cuestión operativa que estimula esta forma de inventar es ¿cómo puedo reformular el problema de manera que pueda resolverlo?"* (p. 20).

Una definición más precisa es la presentada por Stoyanova & Ellerton (1996), quienes mencionan que este proceso ocurre cuando los estudiantes, con base a su experiencia matemática, construyen situaciones personales a partir de un estímulo dado y las formulan como problemas matemáticos.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, en la literatura especializada existen diferentes términos para referirse a la acción de inventar problemas matemáticos y varias definiciones al respecto. Sin embargo, en este estudio se adoptó la concepción dada por Espinoza et al. (2016) quienes señalan que es un proceso matemático complejo en el que se formulan enunciados a partir de la interpretación personal o significado que le da un sujeto a una situación concreta o a un problema previamente dado, el cual puede ocurrir antes, durante o después del proceso de resolución.

2.2. Clasificación y diseño de tareas de Invención de problemas

De acuerdo con Silver & Cai (1996) existe una variedad notable de clasificaciones de tareas de invención de problemas, que dan lugar a una gran cantidad de recursos que se pueden emplear para promover el aprendizaje significativo de los escolares. Al respecto, Stoyanova (1998) identifica tres categorías de experiencia: situación libre, semi-estructurada y situación de planteamiento de problemas estructurada. La situación es libre cuando los estudiantes inventan problemas sin ninguna restricción; mientras que en la semi-estructurada se le proporciona alguna información textual o gráfica y se le pide que explore su estructura de modo que complete un problema usando sus conocimientos, destrezas y experiencias matemáticas previas. Por ultimo, la situación es estructurada cuando se le propone un problema al estudiante que debe reformular cambiando alguna de sus partes. De acuerdo con Ngah, Ismail, Tasir & Mohamad Said (2016) las tareas libres de invención de problemas son más demandantes cognitivamente que las tareas estructuradas y semi-estructuradas.

Otra clasificación se basa en si la actividad se lleva a cabo antes, durante o después de resolver un problema matemático (Silver, 1994). En el primer caso lo que se persigue no es la solución sino la creación de un problema a partir de una situación o experiencia. En el segundo se busca que el estudiante reformule el problema dado y en el tercer caso se le pide que modifique el objetivo, meta o condición de un problema ya resuelto con el fin de generar nuevos problemas.

Stoyanova (1998) y Silver (1994) también identifican 5 categorías generales de invención de problemas que piden a los estudiantes inventar problemas a partir de: a) ninguna restricción; b) una respuesta dada; c) cierta información; d) una situación problemática dada y e) un cálculo dado.

Kojima, Miwa & Matsui (2009, citados en Ghasempour, Bakar & Reza, 2013), agregan una estrategia denominada "imitación", que consiste en exponer a los estudiantes ante casos de problemas y luego ellos reproducen los casos siguiendo los procesos.

De igual forma, Chapman (2012) propone que los estudiantes respondan a actividades que impliquen escribir un problema: a) de su propia elección; b) similar a un problema dado; c) que tengan una pregunta abierta; d) relacionado con un concepto matemático específico; e) basado en un problema mal formulado y f) derivado de una figura dada. Por su parte, Tsubota (1987; citado en Fernández & Barbarán, 2015), distingue seis tipos de tareas que podrían contener: a) un algoritmo; b) texto; c) una figura o una tabla; d) un tópico matemático; e) una respuesta; f) un problema matemático.

Otra estrategia de invención de problemas ampliamente conocida es la denominada *"What if not"* propuesta por Brown & Walter (1990), que se basa en la idea de modificar alguno de los elementos del problema o sus atributos para plantear nuevos enunciados. Estos autores consideran tres pasos para llevar a cabo esta estrategia: 1) re-examinar la información del problema dado, haciendo una lista de los mismos; 2) en la fase *"What if not"* los estudiantes sugieren realizar modificaciones a la información del problema y 3) los estudiantes plantean nuevos problemas de acuerdo con las modificaciones pensadas por ellos mismos.

Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi & Sriraman (2005) también proponen una estrategia compuesta por cuatro procesos que los estudiantes podrían realizar dependiendo de la situación de invención de problemas propuesta: a) editar información, que está asociada a procesos donde los estudiantes inventan un problema sin ninguna restricción, historias o indicaciones; b) selección de la información cuantitativa, que se relaciona con tareas donde se le solicita inventar problemas o preguntas con base en respuestas dadas; c) comprender información cuantitativa, que está asociada al proceso de inventar problemas a partir de ecuaciones o cálculo matemáticos dados y d) traslación de la información cuantitativa, que requiere que los estudiantes inventen problemas apropiados o preguntas a partir de gráficos, diagramas o cuadros.

Más recientemente Ellerton (2013) propone una estrategia con una visión más didáctica denominada *"marco de aprendizaje activo"* para emplear este tipo de actividades en clases de matemática. Este marco se basa en la noción de que el estudiante pasa de una participación pasiva a una activa, haciendo hincapié en las acciones en lugar de los resultados. Para ello propone las siguientes 5 acciones a realizar: a) el profesor presenta ejemplos; b) el profesor llama la atención sobre los ejemplos del libro de texto o internet; c) los alumnos localizan los ejemplos; d) los alumnos resuelven problemas basados en el ejemplo propuesto; e) los alumnos inventan problemas con la misma estructura que el ejemplo propuesto; y f) los estudiantes discuten y resuelven los problemas inventados por sus compañeros.

Este autor considera que si las actividades de invención de problemas quedan fuera de la práctica de aula, el marco de aprendizaje activo presentado anteriormente evidencia que las experiencias matemáticas de los estudiantes sean truncadas y lo único que queda es la resolución de problemas como experiencia final.

Blanco, Cárdenas & Caballero (2015) identifican cinco situaciones de invención de problemas que se podría proponer en clases de matemática. Así, consideran que los estudiantes pueden inventar problemas a partir de: a) distintos algoritmos o procesos; b) una situación concreta al preguntar por el significado de la operación realizada o la operación adecuada a una acción; c) una fórmula o expresión matemática; d) determinadas preguntas o cuestiones; e) datos explícitos.

En cuanto al diseño de las tareas, se recomiendan que las situaciones planteadas sean parte natural de las actividades que lleva a cabo el alumno en clases de matemáticas, por lo que pueden generarse a partir de libros de texto al modificar las características y el enunciado de las tareas (Stoyanova & Ellerton, 1996). Además, se sugiere que los estudiantes inventen enunciados usando su problema como referente, pues en el estudio de Silver & Cai (1996) se observó que a medida que reformulaban sus problemas iba creciendo su complejidad sintáctica y semántica. En este sentido, Singer & Voica (2013) afirman que la situación de invención de problemas más productiva, es aquella en la que se plantea un problema, el estudiante la resuelve y luego la reformula con el fin de obtener uno más complejo.

Espinoza (2011) recomienda presentar situaciones de invención de problemas que incluyan imágenes, ya que en su estudio se encontró que los estudiantes inventaron problemas con mayor riqueza con este tipo de situaciones, que en aquellas donde la situación es presentada de forma textual. Además, sugiere que las tareas propuestas sean de interés y familiar para los estudiantes, incluyan suficiente información tanto explícita e implícitos, promuevan establecer conexiones, motiven a los estudiantes a plasmar su creatividad, permitan el empleo de diferentes tipos de números, cantidades y representaciones numéricas y favorezcan e incentiven la creación de problemas difíciles.

Por ultimo, recomienda pedir a los estudiantes que inventen problemas difíciles de resolver con la intención de que éstos sientan un compromiso hacia la tarea y empleen sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas elaborados.

Así, con base en la literatura consultada, se pueden identificar las siguientes situaciones de invención de problemas:

a) Inventar problemas sin ninguna restricción.

b) Completar un problema agregando la pregunta que falta.

c) Inventar problemas que encajen con una solución, enunciado, contexto, pregunta, operaciones aritméticas, datos, modelo, proceso de resolución, concepto o procedimiento matemático.

d) Inventar problemas basados en imágenes, tablas o gráficos estadísticos, gráficas de funciones, figuras o relaciones geométricas, regiones sombreadas, datos contextualizados en situaciones reales, etc.

e) Inventar enunciados con base en un problema dado o mal formulado.

f) Reformular un problema durante el proceso de resolución o a partir de uno que ya han inventado.

g) Resolver un problema y luego realizar algunos cambios al mismo con el propósito de inventar problemas más complejos.

Para el caso específico de esta investigación, se planteó un instrumento de invención de problemas que incluyó tareas relacionadas con las tres categorías de experiencia de invención de problemas citadas por Stoyanova (1998): situaciones libre, semi-estructurada y estructurada. Además, cinco de las tareas propuestas solicitaban a los estudiantes inventar un problema y luego resolverlo. Otra tarea solicitaba resolver primeramente un problema que luego debían resolver y la última situación propuesta consistía en reformular un problema que ellos mismos habían inventado. Así mismo, se consideró incluir situaciones donde los estudiantes inventen un problema a partir de: a) una situación problemática dada verbalmente (Silver, 1994); b) una figura o imagen dada (Chapman, 2012; Espinoza, 2011); c) usando un problema como referente (Chapman, 2012; Silver & Cai, 1996) y d) sin ninguna restricción.

De igual forma las tareas propuestas están asociadas a los procesos de editar información y traslación de información cuantitativa (Christou et al., 2005). Esto porque los estudiantes inventaron problemas sin ninguna restricción, una situación dada textualmente o a partir de una imagen. También se decidió incluir una situación en la que los estudiantes primero plantean un problema, lo resuelven y luego lo reformulan para obtener uno más complejo, ya que según Singer & Voica (2013) corresponde a una de las tareas de invención de problemas más productivas. Por último, se consideró oportuno solicitar a los estudiantes plantear problemas difíciles de resolver, tomando la sugerencia dada en el estudio de Espinoza (2011).

2.3. Usos y bondades de la invención de problemas

La actividad de invención de problemas no es una tarea reciente (Singer et al., 2013) y su reconocimiento se ha incrementado debido a los usos y bondades que este tipo de actividades aporta a la Educación Matemática. Al respecto, los estándares profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1989, 1999, 2000) sugieren la incorporación de actividades de planteamiento de problemas en clases con el fin de que los estudiantes tengan una mayor participación en la construcción de su conocimiento. A continuación, se presentan algunos aspectos positivos que tiene el implementar este tipo de actividades en clases de matemática.

Una de las bondades que se le reconoce a la invención de problemas es que permite desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Esto es así porque al enfrentarse a este tipo de actividades se debe pensar y analizar críticamente el enunciado, así como examinar los datos que presenta y emplear distintas estrategias de resolución para resolverlo (Ayllón, Ballesta-Claver, et al., 2016). De igual forma, Cárdenas & Malaspina (2016) citan a Kilpatrick & Schlesinger (1990) quienes reconocen que incorporar actividades de invención de problemas en clases de matemática fomenta el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Malaspina (2013) también argumenta que este tipo de tareas brinda la oportunidad para examinar generalizaciones y hacer matemáticas, por lo que fortalece el pensamiento matemático. Además, cuando un estudiante inventa problemas tiene que trabajar sobre el significado de los conceptos y/o procedimientos matemáticos o sobre la utilidad de los mismos, promoviendo el desarrollo del pensamiento matemático (Blanco et al., 2015). Estos autores también consideran que sí un alumno debe plantear, por ejemplo, un problema que se resuelva con una multiplicación, tendrá que imaginar diferentes situaciones donde se aplique dicha operación, dándole significado a este concepto y al proceso matemático a emplear.

Por último, Burcin (2005) afirma que cuando un estudiante inventa sus propios problemas está usando sus propias ideas, dándole tiempo de pensar y así aumentar la precisión y comprensión del conocimiento.

Otra bondad reconocida por varios autores es la de mejorar los procesos de resolución de problemas (Silver, 1994; Silver & Cai, 1996). Al respecto, Espinoza, et al. (2014), citan varias investigaciones que ponen de manifiesto la importancia que tiene este tipo de actividades dentro del proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, dividir el problema en sub problemas o reformularlo para facilitar la resolución del mismo. Además, Fernández, Castillo & Barbarán (2010), sostienen que la invención de problemas debe entenderse como un método capaz de desarrollar la actividad mental en la resolución de problemas.

Así mismo, los estudios de Keil (1965), Pérez (1985) y Winograd (1991) citados en Leung & Silver (1997), confirman que el planteamiento de problemas tiene una influencia positiva en la habilidad de los estudiantes para resolver problemas, ya que promueve el desarrollo de estrategias de resolución. Cannor & Hawkings (1936, citados en Cázares, 2000), manifiestan que si los estudiantes generan sus propios problemas, entonces incrementarán su habilidad para aplicar los conceptos y destrezas necesarias para la resolución.

Malaspina (2013) también considera que la actividad de crear problemas complementa muy bien la de resolución de problemas, ya que contribuye a precisar la situación problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que se espera manejen los estudiantes. Por ultimo, Fernández & Barbarán (2015) declaran que este tipo de tareas mejoran los procesos de resolución, ya que permiten estructurar mentalmente las partes que componen el problema.

La invención de problemas también es considerada como una tarea que fomenta el desarrollo del pensamiento creativo. De hecho, algunos investigadores confirman que existe una relación entre la habilidad que se requiere para inventar problemas y el nivel de creatividad (Ellerton, 1986; Krutetskii, 1976). Además, estudios revelan que la invención de problemas podría estimular la creatividad, posiblemente incluso más que la resolución de problemas (Voica & Singer, 2013).

Silver (1997) sostiene que cuando se instruye a partir de tareas de invención de problemas, el profesor ayuda a que los estudiantes desarrollen su creatividad aumentando la capacidad en cuanto a fluidez, flexibilidad y novedad. Barbarán & Huguet (2013) afirman que las situaciones de invención de problemas incompletas les permiten a los estudiantes proyectar sus ideas, potenciar su originalidad y desarrollar de forma activa su creatividad.

Ayllón, Gallego, et al., (2016) también recogen las aportaciones de Van den Brink (1987), Streefland (1987), Healy (1993) y Skinner (1991), quienes manifiestan que el planteamiento de problemas fomenta el desarrollo de la fluidez, siendo esta la característica principal de la creatividad. Estos autores también consideran que es necesario incluir en el aula actividades de invención de problemas, ya que proporcionan a los estudiantes una educación matemática creativa, donde se cuestiona sobre los problemas inventados y sus soluciones, promoviendo la imaginación y el desarrollo del pensamiento flexible.

Otro uso que se le ha dado a las actividades de invención de problemas es para disminuir la ansiedad matemática de los estudiantes. Al respecto, Burcin (2005) argumenta que este tipo de actividades reduce el temor y la ansiedad que sienten los estudiantes hacia la matemática, ya que durante la práctica se involucran activamente, se entusiasman por completarla y se sienten más motivados al resolver problemas que son más realistas y con mayor significado para ellos. En este sentido, cuando un estudiante inventa un problema, lo siente suyo al crear contextos reales y cercanos a él, aumentando sus ganas de aprender y disminuyendo el miedo que le genera el aprendizaje de la matemática.

Así mismo, Akay & Boz (2010, citados en Espinoza et al., 2014) afirman que las actividades de invención de problemas mejoran la disposición y actitudes de los estudiantes hacia la matemática, reduciendo su ansiedad. Además, argumentan que durante la actividad de inventar problemas se percibe una atmósfera más optimista dentro de la clase, que permite una mayor concentración para actividades de pensamiento crítico, alejando a los estudiantes de conductas negativas.

La literatura muestra también que la invención de problemas es cada vez más empleada como actividad de clase para mejorar la formación matemática general de los estudiantes (English, 1998; Singer, Ellerton, Cai & Leung, 2011). Cuando una persona se enfrenta a resolver un problema, a priori, le supone una tarea no demasiado fácil, constituyendo además un desafío con el que desarrollará su creatividad y sus habilidades matemáticas. Esta circunstancia también se encuentra en el planteamiento de problemas, ya que ésta permite adquirir aprendizajes significativos e indaga en las capacidades matemáticas que la persona tiene, al establecer relaciones entre los distintos conceptos matemáticos, así como en las estructuras numéricas. Esas relaciones tienen un campo de aplicación en matemáticas que amplía el de la invención de problemas.

Brown & Walter (1990, 1993) también emplearon actividades de invención de problemas con este propósito y los resultados de sus experiencias han sido muy alentadores. Según estos autores, cuando los estudiantes inventan y exploran sus propios problemas adquieren una mayor responsabilidad de su propio aprendizaje. De igual forma, Burcin (2005) afirma que este tipo de actividades promueve el aprendizaje porque el proceso de crearlo es en sí mismo es autodidacta. Este mismo autor cita a Dickerson (1999) quien sostiene que esta práctica es una alternativa viable que motiva a los estudiantes a utilizar la matemática para dar sentido a su mundo exterior, creando conexiones entre conocimientos nuevos y previos a través de sus propias experiencias.

La invención de problemas también ha contribuido a disminuir los problemas asociados a la enseñanza de las matemáticas, ya que a través de ésta se puede lograr que el estudiante perciba las matemáticas de una forma más cercana (Ayllón, Gallego, et al, 2016). Además, reduce los errores en la resolución de problemas, ya que inducen a los estudiantes a elegir la información que han de utilizar en la resolución de problemas y a seleccionar los datos que deben operar (Castro, 2011). Así mismo, mejoran la comprensión de textos escritos y visuales sobre cuestiones de contenido matemático y la de expresarse de forma escrita sobre temas matemáticos (Fernández-Bravo & Barbarán, 2012).

Otro de los usos que se le ha dado a las tareas de invención de problemas es como herramienta evaluadora, ya que mediante esta práctica se puede analizar el nivel de razonamiento matemático y creativo que tiene el estudiante (Ayllón, Ballesta-Claver, et al., 2016), así como la comprensión de los conceptos matemáticos y habilidades matemáticas de los estudiantes (Pelczer et al., 2008; Silver, 1994). Del mismo modo, Kwek & Lye (2008) consideran que dichas tareas no sólo evidencian los conocimientos de los estudiantes y qué es capaz de hacer con ellos, sino que también permite al profesor observar patrones en el aprendizaje y el pensamiento matemático de los estudiantes.

Igualmente Lin (2004) destaca que un aspecto positivo que tiene la invención de problemas como herramienta de evaluación con respecto a otras, es que no está separada del proceso de instrucción sino inmersa en ella. De hecho, puede ser una herramienta de evaluación útil para que el docente conozca mejor los procesos cognitivos de sus alumnos, encuentre posibles errores y obtenga información sobre los diferentes niveles de aprendizaje; de manera que pueda realizar ajustes al proceso de enseñanza (English, 1997).

Así, este tipo de prácticas podrían ser utilizadas en clases de matemática para valorar el grado de comprensión de los conceptos matemáticos aprendidos por los estudiantes luego de explicar el contenido a enseñar o como evaluación diagnóstica o simplemente como actividad de clase que permite al estudiante valorar su propio aprendizaje y profundizar en los conceptos aprendidos (Espinoza et al., 2014).

Por último, las actividades de invención de problemas han sido empleadas para analizar el comportamiento de niños con talento matemático. Al respecto se pueden citar los estudios de Ellerton (1986); Pelzcer & Gamboa (2008); Kesan, et al. (2010); Espinoza, (2011); Arikan & Unal (2015) y Manuel & Freiman (2017), quienes propusieron este tipo de tareas a estudiantes con talento matemático. También podría ser utilizada en el proceso de identificación de estudiantes con talento matemático (Kesan, et al., 2010; Ellerton, 1986), ya que algunos estudios identifican diferencias en el planteamiento de problemas de estudiantes con mayor y menor capacidad matemática en aspectos como resolubilidad del problema planteado, cantidad de operaciones, complejidad del sistema numérico, complejidad del problema, lenguaje utilizado, etc (Ellerton, 1986; Espinoza, 2011; Silver & Cai, 1996).

Así, queda en evidencia que la invención de problemas posee una serie de usos y bondades que aportan resultados valiosos a la Educación Matemática. Al respecto, contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, mejora los procesos de resolución de problemas, fomenta el desarrollo del pensamiento creativo, disminuye la ansiedad matemática de los estudiantes, mejora la disposición y actitudes hacia esta asignatura y disminuye algunos problemas asociados a la enseñanza de la matemática. Además, puede ser empleada como una herramienta de evaluación y para analizar el comportamiento de niños con talento en matemáticas.

A pesar de los usos y bondades reconocidas, sigue siendo una práctica poco habitual en clases de matemática, ya que para los maestros podría resultar difícil aplicarla porque no poseen las competencias necesarias (Leung & Silver, 1997). Además, falta un marco teórico más sólido que permita emplear con mayor claridad este tipo de actividades en las aulas (Espinoza et al. 2014).

2.4. Evaluación de las producciones ante tareas de invención de problemas

Existen pocos estudios que aborden un método para analizar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas (Espinoza, Segovia & Lupiáñez, 2015), ya que los investigadores sólo clasifican los diferentes tipos de problemas inventados por los estudiantes en categorías similares (Rosli, Goldsby & Capraro, 2013). Estos autores aseguran que aun queda mucho trabajo por realizar en la evaluación de las producciones de los estudiantes, dada la complejidad que este tipo de actividades representa.

Uno de los trabajos que aborda esta temática es el realizado por Espinoza et al. (2015). En este se presenta una propuesta para analizar las producciones de los estudiantes en contextos de invención de problemas aritméticos, que incluye una serie de variables organizadas en tres grandes categorías: estructura sintáctica, estructura matemática y estructura semántica.

En la primera categoría los enunciados fueron valorados de acuerdo con la longitud del enunciado, el tipo de proposición interrogativa y el tipo de número empleado. En la segunda categoría se analizó el tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución y cantidad de pasos distintos para resolver el problema. En la categoría semántica, los problemas fueron analizados de acuerdo a su componente semántica: cambio, combinación, comparación e igualación para los problemas aditivos; e isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medidas, para los problemas multiplicativos. De igual forma, se estudió la cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado.

En Espinoza et al. (2015) también se recoge otra serie de variables que han sido empleadas para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas. Entre ellas se pueden citar: el enunciado es un problema matemático o no, cantidad de problemas inventados, originalidad del enunciado, complejidad lingüística, suficiencia de la información proporcionada para resolver el problema, significado asignado a los números, dominio de las operaciones y las dificultades observadas en su realización, coherencia de las operaciones con la estructura del problema, sofisticación de las relaciones matemáticas implicadas, complejidad del problema y coherencia global del enunciado (Ayllón, 2005; Cázares, 2000; Leung & Silver, 1997; Silver & Cai, 2005).

Esta última variable también es retomada en el estudio de Ayllón, Gallego, et al., (2016), quienes consideran que un enunciado es coherente si las respuestas son afirmativas en cada uno de los siguientes elementos: a) planteamiento de un problema verosímil; b) utilización de datos numéricos; c) formulación de al menos una pregunta o interrogante a la que había que responder; d) existencia de relación entre datos e interrogantes.

Con respecto a la complejidad del problema inventado, Silver & Cai (2005) empleó los siguientes tres factores para su valoración: sofisticación de las relaciones matemáticas implicadas en el problema, complejidad lingüística y complejidad matemática. Con respecto al primer factor, argumentan que los problemas que implican la relación entre dos o más cantidades son generalmente, aunque no siempre, más complejos que aquellos que implican solo una. Del mismo modo, apuntan que los problemas que implican relaciones de multiplicaciones son generalmente más complejos que aquellos que implican relaciones aditivas.

La complejidad lingüística fue juzgada de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, relacionales o condicionales. Los autores afirman que los problemas con proposiciones condicionales y relacionales tienden a ser más difíciles de resolver, que aquellos que contienen solo una proposición de asignación. La complejidad matemática fue analizada de acuerdo con el número de relaciones de estructura semántica, de manera que entre mayor cantidad de relaciones semánticas, más complejo es el problema.

Kwek (2015) también se refiere a la valoración de la complejidad matemática de un problema inventado. Para ello propone una categorización de tres niveles que incluyen elementos del saber y hacer matemática, como son el razonamiento, la comprensión de conceptos y realizar procedimientos y resolución de problemas. Los problemas categorizados de baja complejidad podrían solicitar a los estudiantes recordar una propiedad y generalmente se resuelven mediante un solo paso. Los de nivel moderado, van más alla del simple hecho de recordar, ya que requieren de una combinación de habilidades y conocimientos matemáticos e implican razonamiento, estrategias de resolución de problemas, aplicación de teorías y varios pasos para ser resueltos. Los problemas con un nivel alto de complejidad requieren varios pasos para ser resueltos ya que demandan el análisis, generalización, síntesis o hacer conexiones.

Por otra parte, en el estudio de Scattarética (2017) se emplearon cuatro categorías para analizar los problemas inventados por los estudiantes. En la primera se analizó si el enunciado inventado correspondía o no a un problema matemático de acuerdo con los siguientes descriptores: a) incoherencia del enunciado verbal; b) información cuantitativa incompleta; c) no presenta intención de averiguar y d) corresponde a un ejercicio.

En la segunda categoría se analizó el tipo de contexto en el que estaba inmerso el problema empleando la clasificación de PISA (OCDE, 2003): personal, educativo-laboral, social o científico. La complejidad matemática del problema fue analizada en la tercera categoría, mediante los tres grados de complejidad de una tarea definidos en PISA: reproducción, conexión y reflexión. En la última categoría se analizó el tipo de problema matemático de acuerdo con su estructura semántica.

Ayllón (2012) estudió los enunciados de los estudiantes a partir de las siguientes variables: la coherencia del enunciado, el tipo problema y el esquema que presenta un enunciado. La coherencia del enunciado la analizó a partir de los siguientes tres elementos: una historia verosímil, la utilización de datos numéricos, el planteamiento de una pregunta o interrogante a responder y la existencia de relación entre datos e interrogante. El tipo de problema es caracterizado por el número de etapas para su resolución, la estructura operatoria subyacente en el mismo, su estructura semántica y el tipo de número utilizado en el enunciado.

Otros estudios proponen algunas variables para valorar el desarrollo de la creatividad de los estudiantes en contextos de invención de problemas, como son la fluidez, flexibilidad y originalidad (Cárdenas & Malaspina, 2016; Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2011; Leung & Silver, 1997; Silver, 1997; Yuan & Sriraman, 2011). La fluidez se refiere al número de problemas inventados que se ajustan a la situación de invención de problemas propuesta. La flexibilidad consiste en la cantidad de diferentes tipos de problemas planteados y la originalidad corresponde al número de problemas que son poco comunes con respecto a los demás.

Por su parte Shriki (2013) agrega una variable más al estudio de la creatividad de los estudiantes denominada generalización, que consiste en la cantidad de problemas correspondientes a una generalización matemática. Este autor también propone un modelo que asigna una puntuación a cada estudiante en cada una de las variables citadas. Por ejemplo, para valorar la fluidez determinó el número máximo de problemas que un estudiante inventó a partir de la situación propuesta y este dato representa una calificación del 100%. Los puntajes relativos de fluidez de los demás estudiantes, los calculó con dicho dato, de modo que si la cantidad máxima de problemas inventados a partir de una situación es 10, entonces aquellos estudiantes que inventaron 7 recibieron una calificación relativa de 70%.

Para valorar la flexibilidad empleó un procedimiento similar, ya que determinó la mayor cantidad de diferentes categorías de problemas que inventó un estudiante a partir de una misma situación y ese dato representa el 100%. Por tanto, si este fue 10 entonces un estudiante que inventó seis categorías diferentes de problemas le correspondería una calificación relativa de 60%. En cuanto a la originalidad, los investigadores identificaron, de acuerdo con su opinión, aquellas producciones que son originales, dado que presentan características que los diferencien del resto de problemas. Por último, la generalización es valorada de acuerdo con la cantidad de problemas de este tipo que inventaron los estudiantes. Para asignar la calificación relativa a la originalidad y generalización se empleó el mismo procedimiento utilizado en la fluidez y flexibilidad.

Manuel & Freiman (2017) emplearon un procedimiento para analizar la riqueza de un problema matemático a partir de las siguientes características: es abierto, complejo, está bien definido y es contextualizado. Para valorar la riqueza diseñaron una rúbrica en la que definieron en cada una de las características citadas anteriormente una serie de criterios. Así, para la primera característica definieron los siguientes dos criterios: el problema tiene múltiples respuestas correctas y el problema tiene múltiples estrategias de solución apropiadas. Para la complejidad del problema definieron los siguientes cuatro criterios: el problema requiere múltiples pasos para ser resuelto; el problema solicita hacer y justificar su escogencia; el problema solicita hacer y encontrar otras soluciones; el problema solicita encontrar patrones y generalizar resultados. Para la tercera característica incluyeron el siguiente criterio: el texto del problema contiene toda la información necesaria para ser resuelto. La última característica fue valorada en relación si el problema está inmerso en una situación real o ficticia.

Los autores calificaron la riqueza al chequear cada uno de los criterios en los problemas y la suma de estos proporcionó un valor entre 0-8 que asigna un valor numérico asociado a la riqueza del problema, de manera que entre mayor sea el número, mayor será la riqueza que tiene el problema.

Por último, los problemas también fueron evaluados de acuerdo con el realismo de la historia presente en el cuerpo, la pregunta y la respuesta. Además, se analizó si el problema resultaba inapropiado contextual y/o matemáticamente (Rosli, et al., 2013). También se valoraron las facetas metacognitivas que están relacionadas con el dominio concsiente de la tarea (Cruz, 2002).

Como se puede apreciar, existe una variedad de métodos y variables que se han empleado para analizar las producciones de los estudiantes en contextos de invención de problemas. Desafortunadamente, los estudios en este sentido no son tan numerosos y profundos como los realizados en resolución de problemas (Rosli et al., 2013). Sin embargo, la revisión de literatura realizada en este apartado, junto con el análisis de las variables de estudio de los problemas matemáticos presentado después en la sección 2.6, aportaron información relevante para definir el esquema de análisis y las variables utilizadas en esta investigación.

2.5. Concepción de problema matemático y sus componentes

Dado que en esta investigación se propone un instrumento de invención de problemas matemáticos, consideramos imprescindible estudiar la noción de problema matemático desde la concepción de diferentes autores para asumir una posición coherente con la finalidad de este estudio.

Al respecto, un problema matemático es considerado como una situación de la que se conoce alguna información que se puede manejar convenientemente para encontrar otra que se busca (Bouvier & Geroge, 1979). Para Santos (2010), un problema matemático debe contener las siguientes características: a) la existencia de un interés; b) la no existencia de una solución inmediata; c) la presencia de diversos caminos o métodos de solución y d) la intención por parte de un resolutor para realizar un conjunto de acciones que le permita resolverlo. Schoenfeld (1985) es más concreto y afirma que un problema se refiere a una tarea difícil para el individuo que está tratando de resolverla. De igual forma Lester (1983) citado en Santos (2010) apunta que un problema matemático es una tarea que no tiene un procedimiento claro que a simple vista garantice la solución del mismo.

Seco & Ramos (1999) también se refieren a la noción de problema matemático y señalan que corresponde a una cuestión donde se busca una explicación o respuesta adecuada o como una proposición en que se formulan una o más preguntas que se deben contestar a partir de una determinada información.

Otra conceptualización es la que aporta Dorsch (1985, citado en Ayllón, 2005). Según este autor, un problema es una especie de reto mental que se caracteriza por tres aspectos: a) estado inicial no deseado, b) estado final deseado y c) barrera que impide la transformación de a) a b).

Pérez, Álvarez & Breña (2016) hacen un estudio sobre la conceptualización de un problema matemático y menciona que se pueden identificar tres tendencias: las realizadas desde el punto de vista psicológico, las que enfatizan la presencia de relaciones matemáticas y las que integran los elementos antes mencionados. Con respecto a la primera, las autoras citan a González (1995), quien afirma que un problema es una situación en la que se debe alcanzar una meta, pero las vías para llegar a ella están bloqueadas y los recursos que tiene disponibles no son adecuados para superarlo. En relación con la segunda tendencia, citan a Guirado (2000), quien declara que un problema matemático es una situación problemática que presenta una organización particular de las magnitudes y relaciones cuantitativas del mundo real y que necesita de vías, métodos y procedimientos matemáticos para ser resueltos. Por último, mencionan a Puig (1996) quien lo conceptualiza como una tarea de contenido matemático que es significativa para el alumno de manera que este pretende abordarlo, pero no ha producido un sentido para él.

Otros autores abordan la conceptualización de problema matemático a partir de los componentes que lo conforman. Al respecto, Fernández (1997) expresa que debe contener la puesta en escena, que incluye, la contextualización, los caracteres y la localización de la historia que tiene lugar. Una segunda componente de información, que se refiere a los datos necesarios para resolver el problema y, por último, una cuestión o pregunta a la que hay que dar respuesta.

Para Malaspina & Vallejo (2014), un problema matemático está compuesto por cuatro elementos fundamentales: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. La primera está constituida por los datos cuantitativos o relacionales. El segundo es lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, mientras que el contexto hace referencia a la situación en la que está inmerso el problema y puede estar vinculado con una situación real (contexto extra matemático) o circunscribirse a lo matemático (contexto intra matemático). El cuarto elemento, el entorno matemático, se refiere a los conceptos matemáticos que pueden ser utilizados para resolver el problema.

De acuerdo con Mayer (1986; citado en Ayllón, 2005) un problema debe contener los siguientes componentes: datos, que corresponden a las condiciones, objetos o información; objetivos, que es lo que se supone se quiere realizar; y obstáculos, que son los procedimientos que resuelven el problema, pero que no son inmediatamente obvios.

Rodríguez, et al. (2015) asumen que los problemas están conformados por datos, que corresponden a las magnitudes, números y relaciones matemáticas explícitas entre los números; condiciones, que son las relaciones matemáticas no explícitas entre lo dado y lo buscado; y la pregunta, que es lo que hay que averiguar.

Por último, Castro (1994) propone una definición que contempla cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición, que corresponde a un enunciado oral o escrito; unos datos conocidos; una intención a movilizar una o más personas para que lo resuelvan; una meta, que permita a los estudiantes llegar a un resultado y un proceso, que corresponde al modo de actuación para alcanzar el resultado.

Como se puede observar, son diversas las definiciones de problema matemático que se pueden encontrar en la literatura, ya que tal concepción no tiene un significado único y preciso que lo caracterice dentro de la investigación en didáctica de la matemática (Pérez et al., 2016). Sin embargo, tienen un punto en común que se relaciona con la dificultad de la tarea propuesta y que la resolución del problema no debe ser evidente para el resolutor.

En este estudio se considera que un problema matemático es un enunciado en el que es necesario superar un obstáculo para alcanzar una meta y para ello se requieren de vías, procedimientos y conocimientos matemáticos. Además, está compuesto por: información, que consiste en las condiciones o datos cuantitativos, números y relaciones matemáticas explícitas entre éstos; requerimientos, que corresponde a la pregunta que debe contestar o lo que hay que averiguar a partir de una determinada información; contexto, que se refiere a la situación en la que está inmerso el problema y que puede ser intra matemático o extra matemático; y proceso, que consiste en los procedimientos o conceptos matemáticos necesarios para resolverlo.

En el siguiente apartado se abordan algunas variables relacionadas con los problemas matemáticos y que sirvieron de insumo para elaborar las categorías de análisis empleadas para estudiar las producciones de los estudiantes.

2.6. Variables de estudio de los problemas matemáticos

Una vez presentada la conceptualización de problema matemático adoptado en este estudio y sus componentes, consideramos necesario indagar y delimitar variables que son de interés particular en el estudio de los problemas matemáticos. Al respecto, se pueden citar las variables concernientes con el contexto, la complejidad del problema, la sintáctica y el contenido matemático.

En relación con las variables de contexto, éstas corresponden al aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas, siguiendo la propuesta de PISA (OCDE, 2012). Este mismo informe manifiesta que la capacidad para resolver problemas en un contexto determinado, condiciona las exigencias adicionales que se podrían asignar a quien resuelve el problema.

Malaspina & Vallejo (2014) también hacen referencia a este tipo de variables y mencionan que el contexto de un enunciado puede ser de dos tipos: intra matemático o extra matemático. En el primero los problemas se circunscriben a lo matemático, por ejemplo calcular el área de un cículo o determinar el dominio de una función. En el segundo, el contexto está más relacionado con una situación de la vida real.

De igual forma en el estudio PISA se definen y utilizan cuatro tipos de contextos que se asocian con una complejidad matemática progresiva: personal, educativa/laboral, social y científico. En el primero se considera la vida personal del alumno como su situación más cercana. Luego se sitúa la vida escolar o laboral, seguido de las situaciones que se relacionan con la propia comunidad del estudiante en su entorno social y comunitario. Por último, están las situaciones de tipo científico que hacen referencia a la aplicación de la matemática al mundo natural y a cuestiones relacionadas con la ciencia y la tecnología (OCDE, 2003).

Dentro de esta categoría también se puede incluir la relevancia matemática del contexto. Al respecto el estudio PISA distingue entre contexto camuflado o de orden cero, contexto de primer orden y contexto de segundo orden. Si el contexto en un problema se utiliza sólo para hacer creer que está inmerso en una situación de la vida real y nada de este es necesario para comprenderlo o resolverlo, entonces es de orden cero. El contexto es de primer orden si es relevante y necesario para resolver el problema y juzgar la razonabilidad de su respuesta; mientras que es de segundo orden si el estudiante debe tomar en cuenta la situación del contexto y el problema matemático para resolverlo, habiendo un claro proceso de matematización. De hecho, la diferencia entre el contexto de primer y segundo orden radica en el papel que desempeña el proceso de matematización. Los niveles más altos de alfabetización matemática requieren el manejo de contextos de segundo orden (Caraballo, 2014).

Otro grupo de variables que son de interés en el estudio de los problemas matemáticos son las que se relacionan con la complejidad matemática del problema. Al respecto Pelczer, et al. (2008), afirman que un elemento a tomar en cuenta en ésta es el empleo de ideas complejas requeridas en su solución. También se han considerado la cantidad de pasos para ser resuelto, el tipo de estructura operatoria, cantidad de procesos de cálculo distintos requeridos en la solución del problema (Espinoza, 2011) y la complejidad de las relaciones matemáticas implicadas, de manera que si involucran relaciones de multiplicación entre cantidades entonces son generalmente más complejas que las que implican relaciones aditivas (Silver & Cai, 2005).

Otra variable ampliamente conocida es la propuesta por el programa PISA (OCDE, 2006) denominada grupos de capacidades. Esta variable se basa en el tipo de exigencia cognitiva que se requiere para resolver los distintos tipos de problemas y que determinan tres niveles de complejidad progresiva, a saber: reproducción, conexión y reflexión. La primera incluye el empleo de procedimientos comunes que conllevan cálculos simples y que son propios del entorno del estudiante. El segundo grupo implica emplear procedimientos no ordinarios para resolver el problema, pero que aun siguen siendo familiares para los estudiantes; mientras que los de reflexión se asocian a procedimientos complejos y al desarrollo de una aproximación matemática general, por lo que requieren que el estudiante comprenda, reflexione, argumente y use su creatividad.

Stein, Smith, Henningsen & Silver (2009) también mencionan la variable demanda cognitiva, la cual se vincula con el esfuerzo cognitivo que debe realizar el estudiante para resolver problemas de matemática. Estos autores determinan los siguientes cuatro niveles que valoran la reflexión y razonamiento que se requiere para resolverlos con éxito: memorización, que corresponde a las tareas de menor demanda cognitiva y que no requieren un procedimiento; algoritmo sin conexión, que sí requieren de un procedimiento, pero no establecen conexiones entre conceptos matemáticos; algoritimo con conexiones, que deben ser resueltos cuidadosamente ya que su respuesta no se deduce explícitamente del planteamiento; y haciendo matemática, que corresponde al de mayor demanda cognitiva e implica un razonamiento complejo, no algorítmico, donde se debe explorar y comprender la naturaleza de los conceptos matemáticos implicados.

Manuel & Freiman (2017) hacen referencia a otra variable denominada riqueza de un problema matemático. En su estudio citan varios autores para sustentar que un problema matemático es rico si presenta las siguientes características: a) es abierto, ya que tiene múltiples respuestas correctas que pueden ser resueltas mediante varias estrategias; b) es complejo, porque requiere más de un paso para ser resuelto, ya que solicita encontrar patrones, generalizar resultados o hacer demostraciones matemáticas; c) está bien definido, si contiene la información necesaria para ser resuelto y no contiene información innecesaria y d) es contextualizado, si está inmerso en una situación real o ficticia.

Las variables sintácticas son aquellas que están relacionadas con el orden y relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema (Puig & Cerdan, 1988). Entre ellas se pueden citar el formato de la presentación del problema, longitud del enunciado, complejidad gramatical, tipo y tamaño de los números, coherencia del enunciado, tipo y ubicación de la pregunta y la inclusión de datos en ésta.

Con respecto a la longitud del enunciado, Espinoza, et al. (2015) emplearon la cantidad de proposiciones para estudiar esta variable y la conceptualizan como "aquellas expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables" (p. 65). También se consideró el orden de magnitud de los números, ya que los problemas con números pequeños tienen una menor dificultad de resolución, dado que se pueden resolver mediante la manipulación de objetos, los dedos o el cálculo mental (Gregorio, 2005).

En relación con el tipo de pregunta, Castro (1995) las denomina proposiciones interrogativas y afirma que pueden ser de asignación o de relación. En el primer caso no se conoce la cantidad asignada y la pregunta demanda que se halle ese valor, por ejemplo: ¿Cuánto tiempo tardó el tren en llegar a la estación de Alajuela? En el segundo caso, la pregunta se refiere a la cuantificación de la comparación entre dos cantidades relacionadas, por ejemplo: ¿Cuántas veces tiene María las galletas que tiene Daniel?

Silver & Cai (2005) agregan un tercer tipo de proposición interrogativa denominada condicional, donde la pregunta establece una condición entre dos elementos, por ejemplo: ¿Si María compró en el supermercado 2 paquetes de galletas más que José, cuánto dinero gastó María? Estos autores asocian esta variable con la complejidad lingüística de un problema.

Por último, las variables de contenido matemático se relacionan con el significado matemático profundo implicado en el problema y pueden clasificarse de acuerdo con el campo de conocimiento, áreas, materias o disciplinas inmersas en el mismo. En el proyecto PISA (OCDE, 2012) también se hace referencia a esta variable y se afirma que para organizarla es necesario que respondan a una visión funcional, vinculado con los fenómenos a los que las matemáticas dan respuesta y que al mismo tiempo incluya las áreas matemáticas convencionales. Así, define las siguientes cuatro categorías que caracterizan el conjunto de contenidos matemáticos: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, e incertidumbre y datos.

La primera categoría se relaciona con la representación de los cambios, funciones y dependencias entre variables, como son las expresiones algebraicas, la interpretación de gráficas, las ecuaciones y las desigualdades. La segunda categoría trata de las relaciones de los cuerpos y la representación en dos y tres dimensiones, por ejemplo, el cálculo de perímetros, superficies, áreas, regularidades, escalas, semejanzas, Teorema de Pitágoras, etc. El contenido de cantidad corresponde a los fenómenos numéricos y a las relaciones y modelos cuantitativos como son las operaciones, cambio de unidades, estimación, proporciones, etc. Por último, incertidumbre y datos se relaciona con el tratamiento estadístico de la información y su interpretación. Además, incluye los elementos relacionados con la probabilidad, predicción, combinatoria, etc.

Así, la revisión de literatura constata la existencia de una serie de variables que son de interés en el estudio de los problemas matemáticos. Estas variables, junto con el estudio de la evaluación de las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas analizadas en la sección 2.4, fueron de gran utilidad para elaborar las categorías de análisis y sus respectivas variables de estudio que nos permitieron estudiar las producciones de los estudiantes.

2.7. Talento matemático

Varios estudios se han propuesto precisar y clarificar el término talento con el propósito de hacerlo más operativo para la investigación (Benavides, 2008). Esto, porque existe una gran diversidad de concepciones para referirse a este concepto: superdotados, altas capacidades, talentosos; encontrándose más de 100 definiciones de talento y sus sinónimos (Villarraga, Martínez & Benavides, 2004). Al respecto, Gagné (1995 y 1993, citado en Benavides, 2008) propone el Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento para distinguir los conceptos de superdotación y talento.

Para Martínez & Guirardo (2010) la superdotación se conceptualiza como un perfil donde el sujeto presenta un nivel elevado de razonamiento lógico, creatividad, memoria, que le posibilita una producción eficaz en cualquier ámbito o tarea, mientras que el talento hace referencia a una elevada aptitud en un ámbito o tipo de información. Además, el superdotado se caracteriza por un nivel elevado de varias aptitudes que puede combinar para obtener un resultado que va más allá de la simple suma de las habilidades, distinguiéndose no solo cuantitativamente, sino cualitativamente por la calidad de sus producciones (Ramírez, 2012).

Por tanto, la superdotación se refiere a la posesión de habilidades naturales en alto grado, que son espontáneas e innatas y que se presentan en al menos un dominio de habilidad; en contraste, el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, la superdotación se asocia a actividades intelectuales y al talento a destrezas y aptitudes más específicas. Por consiguiente, considerando dichas distinciones y las características de los sujetos que participaron en este estudio, nos centraremos en el talento.

Al respecto, el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua propone cinco cocepciones con respecto a este término. El primero de ellos se refiere a una persona inteligente con capacidad de entender. La segunda se relaciona con una persona apta, con capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación. La tercera definición es una unión de la primera y segunda, ya que la concibe como una persona inteligente o apta para una determinada ocupación. La cuarta acepción, que correponde a una definición original del término, concibe el talento como la moneda de cuenta de los griegos y romanos.

El talento también es referido a un conjunto de destrezas y habilidades que le permiten a un individuo dominar un área concreta del saber, de modo que la característica principal del talentoso es su especificidad (Prieto & Catejón, 2000). De igual forma, Clark (1997, citado en Díaz, Aleman, & Hernández, 2013) propone que un sujeto con talento presenta una distinción en algún campo particular, por ejemplo, música, artes y matemática, etc. Lopez-Andrada, Beltrán, López-Medina & Chicharo (2000), también hacen referencia a este concepto y sostienen que los estudiantes con talento muestran habilidades específicas en áreas muy concretas.

Además, el Departamento de Educación de los Estados Unidos (USOE), plantea la siguiente concepción de los sujetos con talento:

> *Los niños talentosos y sobresalientes son los que, identificados por profesionales calificados, manifiestan la virtud de habilidades extraordinarias y son capaces de dar un alto rendimiento académico. Ellos requieren programas educativos diferenciados o servicios más allá de los normalmente brindados por programas regulares de trabajo escolar, para potenciar su contribución a sí mismos y a la sociedad.* (Renzulli, 1996, p. 15)

Otros autores consideran que el talento es una posibilidad de logro que es potencialmente inherente a todo ser humano, por lo que se desarrolla en cualquier momento de la vida de acuerdo con las habilidades de cada ser humano (Huamán, 2006; citado en Reyes-Santander & Karg, 2009). Al respecto Villarraga et al., (2004), distingue entre talento actual y talento potencial. El primero se refiere al ya desarrollado y evidenciado por un sujeto talentoso; mientras que el segundo al que aún no se ha desarrollado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos.

Ramírez (2012) hace un análisis sobre la posible interrelación entre las características de la aptitud matemática que proponen los estudios de Greenes (1986), Miller (1990) y Freiman (2006) y afirma que de ellas se deduce que este constructo ha sido definido en términos de superioridad en procesos matemáticos. Además, considera que la posesión de unas adecuadas actitudes cognitivas como la flexibilidad para organizar datos, agilidad mental, etc, pueden verse manifestadas en el desarrollo de procesos idóneos para realizar con éxito algunas actividades como localizar la clave de los problemas, desarrollar estrategias eficientes, etc.

Villarraga et al., (2004) también proponen cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato o genético, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos. Dado que en este estudio participaron un grupo de estudiantes que han sido seleccionados mediante un test y que tienen alto rendimiento en un área específica del saber, es que tratamos la noción de talento orientado al logro o rendimiento. Dentro de este enfoque, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977), quien concibe el talento como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad.

Por otra parte, considerando que en esta investigación se analizaron las habilidades matemáticas de un grupo de sujetos con talento cuando resuelven tareas de invención de problemas matemáticos, es que nos interesa estudiar un talento específico, el talento matemático.

Una de las formas más sencillas de definir este constructo y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín, Feijoo, Díaz & Rodriguez, 2004). Por lo que, en general, se nomina a aquellos estudiantes talentosos en matemática que son hábiles resolviendo problemas para sujetos de una edad superior. Morales (1998, citado en García, 2014) agrega que poseen un alto grado de dedicación a las tareas asignadas y que presentan altos niveles de creatividad a la hora de abordar tareas matemáticas.

Castelló & Batlle (1998, citado por Fernández et al. 2010) consideran que una persona con talento matemático se caracteriza por disponer de elevados recursos de representación y manipulación de informaciones que se presentan en la modalidad cuantitativa y/o numérica.

Ramírez (2012) señala que las características que definen a estudiantes con talento matemático se han desarrollado desde los años ochenta del pasado siglo y propone que:

> Un alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más alla de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (pp. 23-24)

En esta investigación hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en matemáticas.

2.8. Mecanismos de identificación de estudiantes con talento

Uno de los objetivos de los estudios relacionadas con el talento es el de establecer mecanismos de identificación de este tipo de estudiantes (Castro, 2008). Por tanto, en este apartado describimos algunas estrategias e instrumentos que se han utilizado con este propósito.

Con respecto a las estrategias, Manzano, Arranz & Sánchez de Miguel (2010) presentan cuatro criterios que se pueden emplear en la identificación de estudiantes con talento. El primer criterio se relaciona con la identificación basada en aptitudes y considera que la puntuación mínima para distinguir niños con alta capacidad mediante la prueba de aptitud general debe ser superior al percentil 82, porque esta puntuación es equivalente a un coeficiente intelectual de 115. El segundo criterio es la identificación basada en la creatividad, donde los sujetos que obtienen una puntuación por encima del percentil 75 en los factores exclusivamente creativos según Torrance se consideran con alta capacidad.

El tercer criterio es la combinación de los dos anteriores, por lo que se consideran solo aquellos sujetos que obtienen una puntuación superior al percentil 82 en la prueba de aptitud general y que además demuestran niveles de creatividad que según Torrance están por encima del percentil 75 en todos los factores creativos medidos. Por último, el cuarto criterio es la identificación basada en el modelo de Renzulli, el cual se centra en el modelo de los Tres Anillos establecido por Renzulli (1978). En este criterio se incluyen los sujetos que muestren una alta producción cognitiva general, un alto nivel de motivación y un alto nivel de creatividad.

Genovard & Castelló (1990; citados en González, 2015), clasifican las principales estrategias de identificación en tres grandes grupos: identificación basada en las medidas informales, identificación basada en medidas formales y análisis individualizados. En el primer grupo se encuentran los cuestionarios y auto informes. La ventaja de éstos consiste en la economía de tiempo y en la recolección de ciertos indicios sobre el perfil excepcional del estudiante. En el segundo grupo están los que evalúan directamente los componentes implicados en la excepcionalidad. A pesar de que presentan cierta fiabilidad, resulta una estrategia costosa de aplicar porque los instrumentos generalmente son extensos y su aplicación requiere de expertos en el área. En cuanto a los análisis individualizados, se centran en las características específicas de los sujetos, recogiendo información con técnicas del primero y segundo grupo; así como información de tipo biográfico.

Rogado et al. (1995) menciona una estrategia adicional denominada identificación en el aula, la cual consiste en la observación seria y continua por parte del docente del trabajo de los estudiantes en el aula, el análisis de la creatividad, originalidad y perseverancia que muestra en las tareas que resuelve. Así mismo incluye las calificaciones escolares, la información aportada por otros profesores, sus padres y compañeros de clase.

En relación con los instrumentos, Benavides (2008) menciona varios que agrupa en dos grandes bloques: las técnicas subjetivas o informales y las técnicas objetivas. Las primeras se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son:

a) Informes de los profesores, que generalmente están influenciados por cuestiones del rendimiento escolar y no siempre toman en cuenta aspectos relevantes del talento. Entre este tipo de instrumentos, se puede citar las escalas de Renzulli (SCRBSS) para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes.

b) Informes de los padres, que suponen una fuente de información relevante sobre todo en aspectos evolutivos en las edades tempranas. Se pueden citar los cuestionarios para padres de Beltrán & Pérez (1993).

c) Nominaciones de los compañeros, que recolectan información respecto a las capacidades, intereses, rendimiento académico, socialización y liderazgo del sujeto. Se puede citar el cuestionario para la nominación de iguales de Beltrán & Pérez (1993) que incluye, entre otras cuestiones, cómo señalar a compañeros que haría mejor un presupuesto, el mejor inventor o el más divertido.

d) Autoinformes, que son adecuados para alumnos mayores. Estos autoinformes son poco significativos pues no suelen generar diferencias entre alumnos con talento y alumnos promedio (Genovard & Castelló, 1990).

Con respecto a las técnicas objetivas, éstas se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de instrumentos empleados son:

a) Test de inteligencia general, que ocupan un lugar fundamental en la evaluación del talento y sigue siendo el criterio más valorado por los especialistas. Entre los más aconsejados están el Stanford-Binet Test of intelligence, las escalas de Wechsler y el test de matrices progresivas de Raven.

b) Test de aptitudes específicas, que permiten afinar mucho el tipo de talento del alumno y generalmente incluyen medidas específicas en distintas áreas como razonamiento verbal, numérico, matemático, etc. Entre los test de aptitudes específicas se encuentra la batería de aptitudes diferenciales y generales (BADyG) de Yuste (1995).

c) Pruebas de rendimiento, que evalúan generalmente la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas. Los profesores también pueden elaborar pruebas basadas en el currículum ya que tienen un buen conocimiento del alumno.

d) Test de creatividad, que analiza la creatividad del sujeto a través de medidas de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración de las respuestas. Se puede destacar la prueba de Torrance Test of Creative Thinking (TTCT).

e) Test de personalidad, los cuales pueden dar a conocer la madurez emocional y social del alumno. Entre estos se puede citar el cuestionario de personalidad EPQ-J de Eysenck y Eysenck.

Con respecto a las estrategias empleadas en la identificación del talento matemático, la revisión de literatura constata que existen diversos métodos de enfoque cualitativo y cuantitativo; destacándose entre ellos los test estandarizados. El problema de éstos es que puede suceder que niños muy capaces en el área de la matemática no sean identificados o que suceda lo contrario, niños que no son talentosos puedan ser identificados como tal (Benavides, 2008).

Niederer & Irwin (2001) proponen los siguientes seis mecanismos para identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. Así mismo, Marjoram & Nelson (1988) sugieren algunos métodos como la nominación de los profesores o una puntuación sobresaliente en test de inteligencia general.

De igual forma, algunos autores proponen el uso de la invención de problemas como una herramienta que podría ser utilizada en la identificación de estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986, Kesan et al., 2010), ya que ésta permite observar los conocimientos y habilidades matemáticas, así como la creatividad de niños considerados con talento matemático (Krutetskii, 1976). Además, autores como Getzels & Jackson (1962; citado en Silver, 1994) y Balka (1974) han empleado actividades de invención de problemas en el proceso para identificar individuos creativos.

Por último, Prieto, Barmejo & López (2000) sostienen que la identificación del talento estará condicionada de acuerdo con el propósito que se persiga. De esta forma, si el objetivo es identificar-clasificar el talento, el diagnóstico consistirá en determinar si cumple los criterios para ser considerado como tal. Si el fin es proporcionar un currículum o realizar una intervención, el procedimiento se centrará en la evaluación-reconocimiento que se centra en reconocer las altas habilidades y sus manifestaciones. De acuerdo con este autor, ambos corresponden a dos modelos de atención a la diversidad que pueden funcionar incluso de forma conjunta.

Así, en este apartado se pone de manifiesto las diferentes estrategias e instrumentos que se han empleado para identificar a estudiantes con talento. En este estudio se empleó un instrumento conformado por cuatro cuestionarios de invención de problemas matemáticos con el propósito de identificar estudiantes con altas capacidades hacia la matemática, así como las características que estos presentaron durante la tarea.

2.9. Características del talento matemático asociadas a la invención de problemas

Luego de una revisión sobre la caracterización del talento matemático, se encontró que varios autores proporcionan una serie de rasgos que pueden observarse en niños aventajados en esta disciplina y que pueden servir de señales para proceder a la identificación y evaluación del posible talento matemático mediante tareas de invención de problemas.

Uno de los rasgos que podrían evidenciar es, la formulación de enunciados bien concebidos, en el sentido de que sean coherentes con respecto a la información y conceptos matemáticos implicados así como entre la información dada y lo que se pide resolver. Esto porque los estudiantes con talento captan con facilidad la estructura interna de los problemas, identificando fácilmente sus componentes y les resulta sencillo localizar la clave de los mismos (Krutetskii, 1976; Freiman, 2006).

También podrían mostrar la capacidad de observar, identificar, manipular y establecer relaciones a partir de la información suministrada en la situación propuesta; así como profundizar en las relaciones que establecen los datos e imágenes. Esto porque los estudiantes con talento prestan atención a los detalles, identificar patrones, relaciones y poseen un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales (Banfield, 2005; Freiman, 2006; Reyes-Santander & Karg 2009).

La comprensión en profundidad de ideas complejas de la matemática caracteriza igualmente a un estudiante con talento (Reyes-Santander & Karg, 2009). Además, estos autores sostienen que pueden dominar varios campos del conocimiento. Por tanto, estos estudiantes podrían incluir ideas matemáticas complejas al inventar sus problemas. Se considera que una idea es compleja cuando es comprendida, generalmente, por estudiantes que están en grados superiores de quien la está empleando.

Los estudiantes aventajados en esta disciplina también podrían evidenciar una facilidad para emplear diferentes tipos de números en sus producciones, ya que según Greenes (1981) este tipo de estudiantes muestra flexibilidad para la manipulación de datos. Además, resultó que los estudiantes con talento evidenciaron una mayor capacidad de incluir en sus enunciados diferentes tipos de números que sus compañeros de un grupo estándar.

Otra característica propia de los estudiantes con talento es que logran añadir a partir de una idea varios y diversos pensamientos relacionados con la misma (González & Domigues 2015). Así, esta característica podría evidenciarse cuando incluye en el enunciado diferentes tipos de ideas a partir de la información que aporta la situación de invención de problemas propuesta.

De igual forma, este tipo de estudiantes se ha caracterizado por establecer un control cognitivo durante el proceso de resolución de problemas, ya que se les facilita modificar ideas o estrategias previamente elaboradas (Greenes, 1981). Esta capacidad se asocia con la actividad metacognitiva, ya que ésta hace referencia a cómo piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento los seres humanos (Silva, 2006). Este mismo autor manifiesta que la actividad metacognitiva está conformado por tres procesos esenciales que regulan los procesos cognitivos: la planificación, que es la actividad previa a la ejecución de una determinada tarea y que incluye el diseño de una estrategia; el control, que se muestra mediante actividades de verificación, rectificación y revisión de las estrategias empleadas; y la evaluación, que implica la valoración de los resultados de la estrategia utilizada en términos de su eficacia.

En este sentido, los estudiantes con talento podrían evidenciar este tipo de control durante el proceso de invención de problemas, al realizar cambios en el enunciado con la intención de formular problemas de mayor riqueza. Además, se reflejaría al verificar si el problema inventado es resoluble. Para ello comprueba que está bien concebido, tiene la información necesaria para ser resuelto, que los requerimientos no son ambiguos, que existe relación entre la información y la pregunta y que no presentan alguna incompatibilidad de tipo numérica o conceptual (Espinoza, 2011). Según Cruz (2002), la formulación de problemas requiere de una actividad metacognitiva específica que podría observarse a partir de los cambios que realiza el estudiante a sus producciones y de las respuestas a preguntas como ¿Qué fue lo que hizo? ¿Por qué lo hizo? ¿Qué modificaste? ¿Tiene dominio de esta técnica? ¿Cómo valora lo que has hecho?

La creatividad es otra de las características propias de los estudiantes con talento matemático (Freiman, 2006; do Carmo & de Souza, 2013). Ésta es el proceso donde se construye algo nuevo liberándose previamente de los modos de pensar establecidos (Bolden, Harries & Newton, 2010; citado en Ayllón, Ballesta-Claver, et al., 2016). En este sentido, las personas creativas tienen la capacidad para pensar en algo nuevo que los demás consideran de interés, pero que pocas personas lo hacen de forma diferente y original. Además, suelen tener ideas que rompen con las tradicionales e incluso con los modos generalizados de pensar y actuar (Dolores, Grigorenko & Sainz, 2011).

Así, con base en la literatura consultada, se constata la existencia de una serie de características que han sido identificadas en estudiantes con talento, las cuales sirven como punto de partida en el estudio del talento matemático mediante tareas de invención de problemas. El estudio realizado en esta sección también fue muy útil para definir las categorías de análisis y las variables de estudio utilizadas para valorar las producciones de los estudiantes.

2.10. Síntesis/Balance del marco teórico

En este capítulo se presentaron aspectos teóricos sobre la invención de problemas, los problemas matemáticos y el talento matemático, que fueron extraídos de diversas fuentes bibliográficas de Didáctica de la Matemática y áreas fines. Esta información, que fue organizada en nueve apartados, nos permitió fundamentar teóricamente esta investigación y los elementos que sirvieron para analizar las producciones de los estudiantes ante las tareas de invención de problemas propuestas.

Primeramente se buscó aportar información sobre las diferentes conceptualizaciones dadas sobre la invención de problemas matemáticos, quedando en evidencia que se le ha denominado con diferentes formas y propósitos. Al respecto se le conoce como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990) o creación de problemas . En este estudio se adoptó la definición dada por Espinoza et al. (2016), porque coincidimos en que es un proceso matemático complejo, que puede ocurrir antes, durante o después de resolver un problema, donde el estudiante le da significado personal a una situación concreta o enunciado previamente dado para generar su propio problema.

Además, se hizo una revisión bibliográfica sobre clasificación y diseño de tareas de invención de problemas, con el propósito de analizar algunos elementos que podrían ser tomados en cuenta en la construcción e implementación del instrumento de invención de problemas propuesto en esta investigación. Así, se decidió incluir tareas relacionadas con las tres categorías expuestas por Stoyanova (1998): situación libre, semi-estructurada y estructurada; y que se realizaran antes o después del proceso de resolución de problemas. Además, se utilizaron como reactivos situaciones presentadas de forma verbal, una imagen, un problema como referente y formulando un problema sin ninguna restricción. Así mismo, se incluyó la estrategia de reformulación de problemas.

De igual forma, se consideró relevante exponer los usos y bondades que posee la invención de problemas en la Educación Matemática, entre las que destaca el desarrollo del pensamiento creativo, mejorar los procesos de resolución de problemas y disminuir algunos problemas asociados al aprendizaje de la matemática. Además, algunos autores consideran que puede ser empleada para analizar el pensamiento del estudiante, sus conocimientos y habilidades, así como para estudiar niños con talento en matemáticas.

En este capítulo también se presentaron estrategias y variables que se han empleado en estudios previos para analizar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas. Esta revisión teórica fue de gran relevancia para definir las variables de estudio y el esquema de análisis que definimos en esta investigación. Al respecto, se lograron identificar al menos 28 variables relacionadas con la complejidad del problema y su contexto, el tipo de número, la coherencia del enunciado, el tipo de operaciones empleadas en su resolución, la componente semántica, el tipo de pregunta, la suficiencia de la información, entre otros.

Igualmente se hizo una revisión sobre la conceptualización de problema matemático, ya que en esta investigación se estudiaron los problemas matemáticos que inventaron dos grupos de estudiantes ante un instrumento de invención de problemas. Al respecto concebimos un problema matemático como un enunciado en el que es necesario superar un obstáculo que para superarlo es necesario emplear procedimientos y conocimientos matemáticos. Además, está compuesto por información, requerimientos, contexto y procesos.

Así mismo se analizaron, desde la literatura de Didáctica de la Matemática, algunas variables que son de interés para estudiar los problemas matemáticos y que se relacionan con el contexto, complejidad, sintáctica y contenido matemático del problema. Al respecto se pueden mencionar el tipo de contexto y su relevancia según PISA, el empleo de ideas complejas, la cantidad de pasos y procesos implicados en la solución del problema, la sofisticación de las relaciones matemáticas implicadas para ser resuelto, los grupos de capacidades definidos por PISA, la demanda cognitiva, la riqueza de un problema matemático, la longitud, coherencia, tipo de pregunta y contenido matemático del enunciado. Este apartado fue de gran utilidad para definir las categorías de análisis y sus respectivas variables que fueron empleadas para analizar las producciones de los estudiantes.

Además, se consideró estudiar la conceptualización del talento matemático, ya que existe una diversidad de concepciones para referirse a este concepto. En esta investigación se eligió la conceptualización dada por Passow (1993), quien considera que un sujeto con talento matemático es aquel que ha demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas, esto porque uno de los grupos que participaron en este estudio han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en el área de las matemáticas.

También se buscó aportar información sobre las diferentes estrategias e instrumentos que se han empleado en la identificación del talento, en la que se mencionó brevemente las tareas de invención de problemas. Además, nos situamos en la perspectiva de la identificación del talento empleando tareas de invención de problemas, en la que se pretende identificar cuáles estudiantes cumplen el criterio para ser considerados como tal, así como determinar las características que presentan cuando resuelven dichas tareas.

Por último, se hizo un análisis sobre las características que poseen los estudiantes con talento matemático que podrían servir de señales para evaluar e identificar el talento matemático mediante tareas de invención de problemas. El propósito de este análisis fue identificar algunas variables que podrían ser utilizadas para valorar las producciones de los estudiantes.

Así, consideramos que las ideas presentadas en este capítulo nos sirvieron de insumo para determinar cómo estudiaríamos los procesos de invención de problemas en estudiantes con talento matemático. En primera instancia, el estudio buscó aportar información relacionada con las características que muestran un grupo de estudiantes con talento matemático cuando resuelven siete tareas de invención de problemas de diferente naturaleza. Además, se indagó sobre el uso de este tipo de actividades como una herramienta para identificar estudiantes con talento en matemáticas.

De esta forma, el análisis realizado en este capítulo nos permitió situarnos en la línea de investigación desarrollada por autores como Ellerton, (1986), Kesan et al. (2010) y Krutetskii, (1976), quienes estudiaron la invención de problemas como característica del talento excepcional y como instrumento para identificar estudiantes con talento matemático. Así mismo, se constató que las tareas de invención de problemas nos permitirían observar y analizar las capacidades matemáticas que poseen los estudiantes con talento matemático, ya que en ellas se reflejan sus conocimientos, habilidades y experiencias matemáticas.

Igualmente, la revisión de literatura relacionada con la invención de problemas, el talento y los problemas matemáticos expuesta en este capítulo, nos permitió definir los objetivos y preguntas de investigación; así como el instrumento de invención de problemas utilizado. Además, nos permitió definir las categorías de análisis, las variables de estudio y el esquema empleado para analizar las producciones de los estudiantes.

Así, los enunciados de los estudiantes fueron valorados de acuerdo con 22 variables de estudio, que fueron organizadas en seis categorías de análisis relacionadas con el contexto y complejidad del problema, el pensamiento metacognitivo y divergente y la riqueza en la formulación y reformulación de problemas.

Por último, procuramos que este estudio contribuya con información relevante sobre los procesos de invención de problemas. Primeramente, esperamos aportar un marco de referencia sobre las diferentes situaciones y estrategias de invención de problemas que se puedan emplear en clases de matemáticas. Así mismo, pretendemos contribuir con elementos que podrían ser considerados en la definición de esquemas, variables y estrategias que permitan valorar las producciones de estudiantes ante este tipo de tareas. De igual forma, buscamos aportar información sobre la caracterización e identificación de estudiantes con talento matemático mediante tareas de invención de problemas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología empleada en el desarrollo de esta investigación que estructuramos en seis apartados. En el primero se define el tipo de investigación y en el segundo se presenta la descripción de los sujetos de estudio. En el tercer apartado se expone el diseño de la investigación que incluye la descripción, estudio piloto y procedimiento de aplicación del instrumento utilizado para recolectar información y el proceso de transcripción y codificación de las producciones de los estudiantes. El diseño y descripción de las categorías de análisis, junto con las variables e indicadores definidos en cada una de ellas son descritas en el cuarto apartado. En el quinto apartado se presenta el esquema utilizado para valorar las producciones de los estudiantes. Por último, se describe el procedimiento utilizado para caracterizar los sujetos con talento matemático.

3.1 Tipo de investigación

Este estudio se enmarca dentro de un diseño mixto, en el que se combinan aspectos de diseños simples cuantitativos y cualitativos. Además, corresponde a un estudio descriptivo transversal (Cohen, Manion & Morisson, 2007) que busca ampliar la información relacionada con los sujetos con talento matemático mediante el análisis de los problemas que inventan en un momento determinado, predominando la descripción y caracterización en términos cualitativos y cuantitativos.

También presenta características del diseño ex post facto, ya que en este tipo de estudios no se tiene control sobre la variable independiente, puesto que sus manifestaciones ya han ocurrido (Bisquerra, 2005). En nuestro caso, los estudiantes con talento ya han sido identificados como tal mediante pruebas de selección y se pretende comparar sus producciones ante tareas de invención de problemas con otro grupo de un colegio público estándar ante la misma actividad.

3.2 Sujetos de estudio

En esta investigación se seleccionaron dos grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su competencia matemática. El primero está conformado por 23 estudiantes del Colegio Científico de Costa Rica, sede Universidad Nacional, Región Brunca, con edades entre 16 y 17 años. Este centro está ubicado en el cantón de Pérez Zeledón, Costa Rica, y forma parte de un sistema diferenciado de nueve colegios de educación secundaria ubicados en diferentes regiones del país, que buscan fomentar y desarrollar el talento en el área científica (Matemática, Biología, Física y Química), de 30 estudiantes durante dos años lectivos.

Para ingresar a este centro, los estudiantes realizan una prueba de selección que consta de los módulos de razonamiento lógico-matemático, verbal y visualización espacial. También deben tener calificaciones superiores a 80 (en una escala de 0 a 100) en el primer, segundo y tercer año de la Educación Secundaria. Por último, los estudiantes con las mejores 35 puntuaciones globales realizan una entrevista con el director de la institución para conocer el interés y las motivaciones que tienen para ingresar a la institución.

Aunque el sistema de colegios científicos realiza un proceso de selección, el instrumento empleado no está validado como test de identificación del talento, por lo que se decidió aplicar el test de Matrices Progresivas de Raven (Raven, Court & Raven, 1993), resultando que los 23 estudiantes seleccionados obtuvieron una puntuación por encima del percentil 75. Por tanto, siguiendo la recomendación de Benavides (2008), se puede afirmar que dicho grupo representa una muestra real de estudiantes con talento.

Este centro fue seleccionado porque el autor de este trabajo ha laborado durante 14 años como profesor de Matemáticas en esta institución. Además, representa una oportunidad para investigar un grupo de estudiantes ya identificados con talento y que reciben una educación diferenciada.

El segundo grupo está conformado por 22 estudiantes de un colegio público estándar del cantón de Pérez Zeledón, Costa Rica, también con edades entre los 16 y los 17 años. La selección de este grupo se debió a que estaba conformado por un conjunto de estudiantes típicos de un colegio público normal de la región y que no han sido identificados con talento.

Es importante señalar que ninguno de los estudiantes incluidos en esta fase participó en el estudio piloto aplicado en esta investigación. Además, mencionaron no haber recibido preparación previa con respecto a resolver tareas de invención de problemas, ni sus profesores habían realizado actividades de este tipo en sus clases.

3.3 Diseño de la investigación

El diseño del estudio comprendió la realización de cuatro acciones generales: a) fundamentación, diseño y aplicación de un instrumento de invención de problemas; b) definición de un esquema de análisis y un conjunto de variables para estudiar los problemas inventados, c) análisis y comparación de las producciones de los estudiantes con base en las variables de análisis definidas y d) caracterización de los sujetos y elaboración de sus perfiles.

Durante el desarrollo de la primera acción se realizó un estudio piloto de la investigación, que permitió realizar ajustes al instrumento de invención de problemas elaborado inicialmente. Estos cambios se realizaron sobre el tipo de tarea, las indicaciones, la situación presentada y el tiempo estipulado para completarla. Además, su aplicación permitió determinar un esquema de análisis y variables de estudio que fueron utilizadas para caracterizar las producciones de los estudiantes en el estudio piloto y en la investigación principal.

A continuación, se explica con mayor detalle cada una de las acciones realizadas para llevar a cabo el estudio, describiendo en primera instancia el diseño del instrumento de invención de problemas, así como el estudio piloto realizado y los principales resultados de su implementación.

3.3.1 Diseño del instrumento de invención de problemas

En este estudio se elaboró un instrumento de invención de problemas conformado por cuatro cuestionarios. El objetivo de este instrumento fue recolectar, a partir de las producciones de los estudiantes, información que permitiera caracterizar el talento matemático a través de la invención de problemas. Para el diseño se tomó en cuenta como punto de partida el instrumento utilizado en un estudio previo de trabajo final de Máster realizado por el autor de esta investigación, cuyo objetivo fue caracterizar el talento matemático de 21 estudiantes que participan en el proyecto ESTALMAT-Andalucía[1] en España (Espinoza, 2011).

[1] http://www.estalmat.org

Además, se realizó una revisión de la literatura relacionada con la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas y de las características del talento matemático implicadas en los procesos de invención de problemas.

También se tomó en cuenta que las tareas propuestas fueran familiares para los estudiantes y producto de las actividades que ellos realizan en clases de matemáticas (Stoyanova & Ellerton, 1996). Por tanto, las situaciones planteadas corresponden a contextos cercanos a los estudiantes y algunas de ellas son modificaciones de problemas de libros de texto que fueron adaptadas para actividades de este tipo. En términos de la clasificación de los contextos de PISA (OCDE, 2012), se trata de problemas en un contexto personal. De igual forma, se consideraron aspectos como el tipo de contexto e información que permanece desconocida, el tipo de número y su magnitud, la presentación de la información, la variedad de ideas explícitas o implícitas, el contenido matemático y las relaciones matemáticas que podrían surgir de la situación presentada a los estudiantes.

Además, se estimó emplear las estrategias de reformulación de problemas, pues Singer & Voica (2013) sostienen que la situación de invención de problemas más productiva, es aquella en la que se plantea un problema, el estudiante lo resuelve y finalmente modifica algunos componentes con el fin de obtener un resultado o solución que satisfaga ciertos criterios.

Así, se consideró que el instrumento debía cumplir al menos las siguientes condiciones: el contexto debe ser de interés y familiar para los estudiantes, presentar diversidad de tareas de invención de problemas que permitieran a los estudiantes mostrar la variedad, novedad y cambio cognitivo durante la actividad (Singer & Voica, 2013), permitir el empleo de diferentes tipos contextos, números, magnitudes, conocimientos y representaciones numéricas y favorecer e incentivar la invención de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

Con respecto a esta última condición, se les pidió a los estudiantes plantear problemas que consideraran difíciles de resolver, con la intención de que emplearan en un alto grado sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas elaborados. Esta condición se aplicó en estudios previos, como en Espinoza (2011) y Pelzcer & Gamboa (2008) y pretende que los estudiantes pongan su mayor esfuerzo y compromiso por inventar problemas matemáticos complejos y ricos.

Por último, se decidió elaborar diferentes tipos de tareas de invención de problemas que fueron contrastadas con los elementos antes mencionados. De éstas, nueve fueron elegidas para conformar el primer instrumento, que fue aplicado en un estudio piloto cuyo objetivo fue determinar la idoneidad de las tareas propuestas. Además, su aplicación ayudaría a identificar algunas variables de estudio que permitieran caracterizar los enunciados inventados por los estudiantes.

A continuación, se describe el instrumento empleado en el Trabajo Final de Máster citado anteriormente. Luego se presenta el estudio piloto y los principales resultados de su implementación.

3.3.2 Descripción del instrumento empleado en un estudio previo de Trabajo Final de Máster

El instrumento que se presenta a continuación fue empleado en un estudio previo que se realizó en el 2011 en la Universidad de Granda, España, con el fin de caracterizar un grupo de estudiantes con talento matemático mediante tareas de invención de problemas aritméticos. Dicho instrumento estaba conformado por dos tareas semi-estructuradas de invención de problemas, pero con características diferentes. El primero presentaba la información mediante una imagen, mientras que el segundo de forma textual.

La indicación de la primera tarea fue la siguiente:

"De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información"

La figura propuesta[2] a los estudiantes para que invente el problema fue la siguiente:

[2] http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

Figura 1 *Imagen presentada en la primera tarea de invención de problemas*

En esta tarea se les pedía a los estudiantes inventar un problema aritmético difícil de resolver a partir de una imagen que mostraba a un grupo de niños corriendo alrededor de un parque, así como una cancha de fútbol y un edificio. La única información explícita que contiene la misma es que una vuelta al parque son 80 metros. En el estudio se consideró que la situación permitía plantear problemas con diferentes tipos de números y relacionados con la distancia, tiempo, velocidad, área, perímetro, etc.

La segunda tarea consistía en una situación donde los estudiantes debían inventar problemas aritméticos difíciles de resolver a partir de una información presentada de forma textual. La indicación precisa fue la siguiente:

"Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

La información con base en la cual debían inventar el problema fue la siguiente:

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

Esta tarea es diferente a la anterior porque la información suministrada está dada de forma verbal e incluye tres datos numéricos de forma explícita (hora, capacidad del tren y cantidad de vagones). En el estudio se consideró que los estudiantes podían inventar problemas con distintos tipos de números y relacionados con la distancia, tiempo, velocidad, capacidad, peso, fuerza, costo, etc.

3.3.3 Estudio piloto del instrumento

La aplicación del estudio piloto tuvo como objetivo comprobar si las tareas propuestas son las más adecuadas como reactivos; así como determinar si el tiempo para completarlas y el orden establecido era el adecuado. Además, se pretendía identificar, con base en el análisis de las producciones, algunas variables que permitieran estudiar los enunciados inventados por los estudiantes.

En el estudio piloto participaron estudiantes de los mismos centros de estudio que fueron seleccionados para esta investigación de tesis. Así, el primero estuvo conformado por cuatro estudiantes del Colegio Científico de Costa Rica, sede Universidad Nacional, Región Brunca y el segundo por siete estudiantes de un colegio público estándar de Pérez Zeledón, Costa Rica, con la misma edad.

El instrumento empleado estaba conformado por un total de nueve tareas de invención de problemas distribuidas en tres cuestionarios. El primero contenía cuatro tareas libres de invención de problemas donde el estudiante formulaba enunciados sin ninguna restricción y luego los reformulaba para obtener un problema más complejo. El segundo cuestionario presentaba dos tareas semi-estructuradas a partir de las cuales debían inventar problemas difíciles de resolver con base en una información textual o enunciado. El último incluía tres tareas semi-estructuradas donde formulaban y reformulaban problemas a partir de una imagen, figura geométrica y recorte de periódico.

Ambos grupos completaron el instrumento por separado en dos sesiones de 80 minutos, completando el cuestionario 1 y 2 en la primera sesión y el cuestionario 3 en la segunda. Ninguno de los grupos recibió preparación o entrenamiento previo en invención de problemas matemáticos. En el anexo A se presenta el instrumento empleado en el estudio piloto de la investigación.

Los resultados del estudio piloto confirmaron que los estudiantes, en términos generales, fueron capaces de inventar problemas con base en las tareas propuestas, excepto en la tarea 3 y 4 del cuestionario 1, donde resultó que ningún estudiante del grupo estándar inventó un enunciado que se resolviera con el tema de ecuaciones. De acuerdo con lo mencionado por este grupo, ellos no sabían en qué consistía un problema que se resolviera con ecuaciones; sin embargo, el profesor a cargo confirmó que el tema sí se había impartido en clases. Caso contrario sucedió con el grupo talento que sí resolvieron dicha tarea.

También resultó que algunos estudiantes de ambos grupos no completaron la tarea 3 del cuestionario 3. Esto quizás se debió a que no tuvieron el tiempo suficiente para hacerlo pues correspondía a la última tarea propuesta. A pesar de esto, se consideró importante conservar una tarea similar en el cuestionario posterior y definitivo, ya que ésta se enmarca en un contexto cercano a los estudiantes; sin embargo, se cambió la imagen propuesta por una que incluyera precios y productos del supermercado, pues permite comparar precios o listas de compras, aplicar descuentos, establecer relaciones entre los precios o capacidades de los productos, plantear ecuaciones, etc. La imagen propuesta es la siguiente:

También se consideró conveniente cambiar la tarea 2 del cuestionario 2, ya que no promovió la invención de problemas difíciles, ni se encontraron diferencias en las producciones de ambos grupos. Esta tarea se sustituyó por otra donde el estudiante primero resuelve el problema planteado y luego inventa uno nuevo modificando alguno de los datos, información o pregunta de dicho problema. La tarea propuesta es la siguiente:

> "Resuelva el siguiente problema matemático:
> Juan, Pedro y Arturo se fueron de paseo el fin de semana a la playa y para regresar a casa decidieron turnarse para conducir. Arturo condujo 80 km más que Pedro, Pedro condujo el doble de kilómetros que Juan. Juan condujo 50 km.
>
> a. ¿Cuántos kilómetros condujo cada uno?
> b. ¿Cuántos kilómetros recorrieron de la playa a la casa?
>
> Inventa un problema matemático modificando alguno de los datos, información o pregunta del problema anterior. Si lo considera necesario puede agregar más datos o información".

De igual forma, luego de analizar las características de las tareas propuestas, se consideró necesario agregar una nueva tarea con una estructura distinta, que promoviera el empleo de diferentes tipos de números y magnitudes. La tarea propuesta es la siguiente:

> "Elige un contexto o situación de la primera columna y unos datos de la segunda columna para inventar un problema matemático."

• En el cine • En la fiesta del colegio • El jardín de mi casa • En un concierto de Rock • La memoria de mi Play Station 4 • En la tienda de ropa • Hay 10 niños y 15 niñas en una fila • Mientras jugábamos pokemon go	3, 6, 10, 21, 60, 1500, 2600, 14600 ½ , ¾, 7/5 20%, 35%, 50%, 60%, 75% -10, -25, -40, -3100 $\sqrt{5}, \sqrt{17}, \sqrt{32}, \sqrt{120}, \sqrt{2100}$

En relación con el tiempo para completar las tareas, se consideró necesario eliminar algunas de ellas, ya que los estudiantes tuvieron dificultades para completarlas. Así, se eliminaron las tareas 3 y 4 del cuestionario 1 y la tarea 3 del cuestionario 3, ya que presentan características similares a otras del instrumento. Además, para que los estudiantes dispusieran de más tiempo, se decidió que en la tarea donde deben inventar tres problemas (Tarea 1 del cuestionario 2), solo resolvieran el que consideren más difícil.

Por otra parte, se determinó que es necesario reordenar los cuestionarios con el fin de iniciar con tareas más estructuradas y que presenten información más explícita. Esto porque se observó una dificultad en los estudiantes por plantear sus primeros problemas. Así, se decidió que las primeras tareas del instrumento fueran aquellas que muestran información textual con variedad de información y datos. Seguidamente las tareas donde el estudiante invente problemas con base en alguna imagen, recorte de periódico o un problema previamente dado y para finalizar aquellas donde se formulen y reformulen problemas sin ninguna restricción.

Por último, con base en el análisis de las producciones de los estudiantes se identificaron trece variables de estudio relacionadas con la coherencia del enunciado, la complejidad sintáctica y matemática, la diversidad y complejidad de ideas que emplea el estudiante, el empleo de diversos campos del conocimiento, el pensamiento metacognitivo y divergente, la creatividad y la invención de problemas de gran riqueza. Estas son descritas en la sección de metodología de esta memoria.

A continuación se describe el instrumento de invención de problemas que fue utilizado en el estudio definitivo.

3.3.4 Descripción del instrumento de invención de problemas

El instrumento empleado en esta investigación fue presentado a los estudiantes en siete documentos separados y en cada uno de ellos se mostró una tarea con base en la cual debían inventar problemas difíciles de resolver. En la primera página de cada cuestionario se les pidió a los estudiantes información general, como el nombre y apellidos, edad, nombre del centro educativo y nivel que cursa. Además, en cada una de las tareas se incluyó un recuadro para que el estudiante asignara el nivel de dificultad que le conllevó completar la tarea de invención.

Por otra parte, para facilitar la organización y transcripción de las producciones, se decidió llamar al grupo de estudiantes del Colegio Científico de Costa Rica, sede Universidad Nacional, Región Brunca, que participaron en este estudio "grupo talento", el cual abreviamos como GT y a los estudiantes del grupo del colegio público estándar "grupo estándar", abreviado GE. Además, se empleó una codificación con 8 caracteres de manera que los primeros cuatro indican el número del estudiante y grupo al que pertenece, mientras que los restantes indican el número de tarea y cuestionario. Por ejemplo, el código 12GT-T2-C4 se refiere a la producción del estudiante número 12 del grupo talento, al contestar la tarea 2 del cuestionario 4.

En relación con el instrumento empleado, se decidió que estuviera conformado por siete tareas organizadas en cuatro cuestionarios. En el primer cuestionario (C1) se incluyeron tareas semi-estructuradas donde la situación se expone de forma textual. El segundo cuestionario (C2) incluye situaciones de invención de problemas que contienen imágenes como reactivos. Este cuestionario se incluyó siguiendo la recomendación dada por Espinoza (2011), quien afirma que este tipo de tareas promueven la invención de problemas ricos. En el tercer cuestionario (C3) se incluyó una única tarea estructurada donde el estudiante primero resuelve un problema y luego con base en este plantea uno nuevo, pero con mayor dificultad. Esto porque según Singer & Voica (2013) es una de la situación de invención de problemas más productiva.

Por último, en el cuarto cuestionario (C4) se decidió incluir tareas libres de invención de problemas donde los estudiantes formulen y reformulen su propio problema sin ninguna restricción. Este cuestionario fue incluido para completar las tres situaciones de invención de problemas propuestas por Stoyanova (1998): situación libre, situación semi-estructurada y estructura de invención de problemas. Además, se tomó en cuenta la recomendación dada por Silver & Cai (1996) quienes afirman que a medida que los estudiantes reformulan sus propios problemas, va creciendo su complejidad sintáctica y semántica.

A continuación se presenta la descripción de cada una de las tareas incluidas en los cuestionarios. En el anexo B de esta memoria se reproduce el instrumento tal y como se aplicó a los estudiantes.

Cuestionario 1

Este cuestionario está conformado por dos tareas semi-estructuradas de invención de problemas, donde se pedía formular problemas difíciles de resolver a partir de una información textual o enunciado.

En la tarea 1 (T1), los estudiantes inventaban un problema matemático con base en una situación expuesta de forma escrita. La tarea propuesta es la siguiente:

> Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo considera necesario puede agregar más datos o información.
>
> "Un tren con cuatro vagones para pasajeros y dos para mercancías sale de una estación de Cartago a las 9:00 am con destino a Alajuela. El tren puede transportar un total de 294 pasajeros y 2365 kg de mercancías".

En la segunda tarea los estudiantes debían inventar problemas con base en una tabla que presenta un conjunto de contextos y diferentes tipos de números. La indicación de la tarea y la situación de invención de problemas propuesta es la siguiente:

> Elige un contexto o situación de la primera columna y unos datos de la segunda para inventar un problema matemático.

• En el cine • En la fiesta del colegio • El jardín de mi casa • En un concierto de Rock • La memoria de mi Play Station 4 • En la tienda de ropa • Hay 10 niños y 15 niñas en una fila • Mientras jugábamos pokemon go	3, 6, 10, 21, 60, 1500, 2600, 14600 ½ , ¾, 7/5 20%, 35%, 50%, 60%, 75% -10, -25, -40, -3100 $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{120}$, $\sqrt{2100}$

Esta tarea presenta características de interés para el estudio, como es promover que los estudiantes inventen problemas con diferentes tipos de contexto y tipos de números, así como potenciar su creatividad con situaciones cercanas a ellos.

Estas tareas fueron elegidas porque tienen características interesantes. Primero, ambas presentan la información de forma textual. Además, incluyen datos numéricos de diferente tipo y de forma explícita. En el caso de la T1, se indica la hora de salida del tren, el total de pasajeros y kilogramos de mercancía que puede transportar; mientras que en la segunda se agrega una columna con números de diferente tipo y tamaño, que el estudiante podría incluir en el enunciado; así como la cantidad de niños y niñas que estaban en una fila.

Además, consideramos que ambas tareas promueven la invención de problemas en diferentes contextos y contenido matemático. Por ejemplo, en la T1 se podrían plantear enunciados relacionados con distancia, tiempo, velocidad, capacidad, dimensiones, costo, fuerza; que podrían estar incluidos en los bloques de Aritmética, Geometría e incluso Física, o la combinación de éstos. En la T2, se les presentaba a los estudiantes ocho contextos que son muy cercanos a ellos, como ir al cine, una fiesta en el colegio, el jardín de su casa, un concierto de Rock, la memoria de su play Station 4, la tienda de ropa, niños en una fila y jugar pokemon go. Estos problemas podrían ser planteados en el área de la Aritmética, Física, Geometría, Estadística o combinación de éstos.

Por último, es importante mencionar que la T1 es similar a la empleada en el estudio de Espinoza, et al. (2016), donde los estudiantes inventaron problemas de gran riqueza. Además, permitió establecer diferencias en las producciones, de modo que los chicos con talento matemático inventaron problemas más ricos que sus compañeros de un colegio público estándar.

Cuestionario 2

El C2 contiene dos tareas semi-estructuradas de invención de problemas donde los estudiantes inventan enunciados a partir de una imagen o recorte de periódico. En la T1 los estudiantes debían formular tres problemas matemáticos a partir de una imagen que muestra tres niños corriendo alrededor de una plaza circular, una cancha de fútbol y un edificio. Se les pidió inventar tres problemas para estudiar el proceso creativo, ya que éste fue analizado con base en tres indicadores: flexibilidad, fluidez y originalidad. En esta tarea los estudiantes solo debían resolver el problema que consideraran más difícil de resolver. La tarea propuesta es la siguiente:

De acuerdo con la información de la siguiente figura inventa tres problemas matemáticos que te parezcan difíciles de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información. Resuelve el problema que consideres más difícil de resolver.

En la T2, los estudiantes debían inventar problemas a partir de un recorte de periódico relacionado con artículos del supermercado. A continuación, se presenta la indicación de la tarea y la situación de invención de problemas propuesta:

De acuerdo con la información del siguiente recorte de periódico, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo considera necesario, puede agregar más datos o información.

Consideramos interesante incluir estas tareas porque los estudiantes debían inventar problemas a partir de los elementos incluidos en una imagen. Por ejemplo, en la T1, se muestra un cartel en el centro del parque que indica que una vuelta son 80 m, pero también la imagen muestra elementos que no poseen datos numéricos como una plaza de fútbol, dos lámparas, un edificio y tres niños corriendo alrededor del parque. La T2 presenta los precios de varios productos y algunas ofertas que ofrece el supermercado por comprar más de un artículo.

Otro aspecto que se consideró es que ambas tareas son cercanas a los estudiantes y vinculadas con acciones que ellos realizan con frecuencia, como son el jugar o hacer las compras en el supermercado con sus papás. De igual forma, creemos que las tareas potencian la creatividad, ya que las imágenes incluidas proporcionan información de diferente tipo que les permite inventar problemas en diferentes contextos y categorías de contenido matemático. Además, los estudiantes podrían establecer relaciones entre los elementos que aporta la imagen. Así, podrían plantear problemas en el área de la Aritmética, Física, Geometría, Estadística, Cálculo, etc. Por último, se consideró relevante incluir tareas de este tipo, porque en el estudio de Espinoza et al. (2016) se concluye que con base en estas los estudiantes con talento inventan problemas de gran riqueza.

Cuestionario 3

El C3 está conformado por una sola tarea, que solicita en primera instancia resolver un problema y luego con base en éste inventar uno modificando sus datos, información o pregunta. La indicación de esta tarea y la situación propuesta es la siguiente:

Resuelva el siguiente problema matemático.

"Juan, Pedro y Arturo se fueron de paseo el fin de semana a la playa y para regresar a casa decidieron turnarse para conducir. Arturo condujo 80 km más que Pedro, Pedro condujo el doble de kilómetros que Juan. Juan condujo 50 km.

c. ¿Cuántos kilómetros condujo cada uno?
d. ¿Cuántos kilómetros recorrieron de la playa a la casa?

Inventa un problema matemático modificando alguno de los datos, información o pregunta del problema anterior. Si lo considera necesario puede agregar más datos o información.

Consideramos pertinente incluir esta tarea porque según Singer & Voica (2013), la situación de invención de problemas más productiva es aquella en la que primero se resuelve un problema y con base en este se pide plantear uno más complejo.

Cuestionario 4

El último cuestionario está conformado por dos tareas libres de invención de problemas. En este tipo de tareas no se presentan algún reactivo con base en el cual inventar problemas, sino que se pide inventar un problema sin ninguna restricción y luego reformularlo para obtener un problema más complejo.

La T1 solicita inventar un problema matemático que ellos mismos pudieran resolver, pero que consideraran difícil para sus compañeros; mientras que la T2 pide reformular el problema planteado en la primera, cambiando o agregando más información de modo que fuera más difícil de resolver.

Estas tareas fueron incluidas primeramente porque se quería estudiar la capacidad de los estudiantes de reformular con mayor riqueza un enunciado que ellos mismos habían inventado. Para ello se siguió la recomendación dada por Silver & Cai (1996) quienes afirman que a medida que los estudiantes reformulaban sus problemas va creciendo su complejidad sintáctica y semántica.

Así, el instrumento empleado en la investigación está conformado por cuatro cuestionarios de invención de problemas que contienen siete tareas de diferente naturaleza. El C1 incluye dos situaciones presentadas de forma textual, mientras que en el C2 el reactivo presentado son dos imágenes, uno en un contexto más escolar que muestra a tres niños corriendo alrededor de una plaza y el otro a un contexto familiar que simula las compras en un supermercado. El C3 presenta un problema que primeramente debían resolver y luego reformularlo por uno con mayor dificultad. Por último, en el C4 no se presenta ningún reactivo, sino que el estudiante inventa libremente su problema.

En la siguiente sección se describe el procedimiento utilizado para aplicar el instrumento.

3.3.5 Procedimiento de aplicación del instrumento

El instrumento de invención de problemas fue aplicado por separado a cada grupo de estudiantes en dos sesiones de 80 minutos. En la primera sesión completaron el C1 y la T1-C2, y en la siguiente sesión completaron la T2-C2, así como el C3 y C4. En el caso del grupo talento, el instrumento fue aplicado en la primera semana de noviembre del 2017, mientras que en el grupo estándar en la segunda semana de ese mismo mes.

El procedimiento para aplicar el instrumento fue el mismo en ambos grupos. El investigador y autor de este trabajo se presentó al aula y les comentó a los estudiantes que la actividad formaba parte de un estudio sobre los procesos de invención de problemas. Seguidamente les entregó las tareas correspondientes y les indicó que en cada una de ellas debían inventar problemas matemáticos que consideraran difícil de resolver. También les informó que debían resolver todos los problemas que inventaran, salvo en la T1-C2, donde sólo resolverían el problema que consideraran más difícil.

Luego el entrevistador entregó a cada estudiante un lápiz sin borrador y les indicó que tampoco podían utilizar uno si lo tenían, ya que en el estudio era importante registrar los cambios que podían realizar al enunciado. Por tanto, si se equivocaba o quería realizar algún cambio, sólo tenían que tachar con el lápiz. Finalmente leyó en voz alta las indicaciones de las tareas y les dijo que disponían del resto de la sesión para inventar los problemas solicitados.

3.4 Diseño y descripción de las categorías de análisis

En este apartado se describen las categorías de análisis que fueron definidas para estudiar las producciones de los estudiantes. De igual forma se puntualiza las variables que conforman cada categoría y los indicadores definidos en cada una de ellas.

3.4.1 Contexto del problema

Esta categoría se relaciona con la historia real o ficticia que incluye el estudiante en el enunciado del problema. También podría suceder que éste carezca de un contexto, por lo que el problema estaría inmerso en una situación meramente matemática. A continuación, se describen las tres variables empleadas para estudiar esta categoría.

Tipo de contexto matemático. Se refiere a si el contexto del problema está inmerso en una situación real. Para ello se asume la clasificación por Malaspina & Vallejo (2014) quienes clasifican los problemas de acuerdo con su contexto en intra matemático o extra matemático. En el primer caso el problema se circunscribe a lo matemático y no está vinculado a ninguna situación de la vida real. Por ejemplo, calcular el área de una esfera de radio 5 cm o determinar la ecuación que define la recta que pasa por dos puntos dados. Los problemas extramatemáticos son aquellos donde su contexto está relacionado con una situación real. Para estudiar esta variable se utilizaron los siguientes indicadores:

- El contexto del problema es intramatemático
- El contexto del problema es extramatemático.

Tipo de contexto. Se refiere a la categoría de contexto en la que está inmerso el problema, que puede clasificarse como personal, educativo/laboral, social o científico (OCDE, 2003). Un contexto es personal si se centra en actividades del propio individuo, su familia y su grupo de iguales. Los problemas de contexto educativo/laboral están relacionados con el mundo laboral o educativo, mientras que los de la categoría social se centran en la propia comunidad (ya sea local, nacional o global) del estudiante. Pueden incluir aspectos como el transporte, el gobierno, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, las estadísticas nacionales, etc. Por último, un problema se clasifica de contexto científico si hace referencia a la aplicación de la matemática al mundo natural y a cuestiones y temas relacionados con la ciencia y tecnología. Los siguientes son los indicadores utilizados para estudiar esta variable y que corresponden al tipo de contexto en el que está inmerso el problema:

- Personal
- Educativo/laboral
- Social
- Científico

Relevancia del contexto. Consiste en la importancia que éste tiene en la solución del problema. Así, la relevancia del contexto es de orden cero si se utilizó sólo para hacer creer que el problema estaba inmerso en una situación real, pero nada concerniente al mismo fue necesario para resolverlo. Es de primer orden si el contexto es necesario para resolver el problema y analizar la razonabilidad de la respuesta, pero para resolverlo no se da un proceso profundo de matematización. Por último, si al resolver el problema es necesario emplear el contexto y además se da un proceso profundo de matematización, entonces la relevancia del contexto es de segundo orden (Caraballo, 2014). La diferencia entre un contexto de primer y segundo orden consiste en la profundidad del proceso de matematización necesario para resolver el problema. Para estudiar esta variable se utilizaron los siguientes indicadores relacionados con la relevancia matemática del contexto:

- Orden cero
- Primer orden

- Segundo orden

3.4.2 Complejidad del problema

En la segunda categoría se estudió la complejidad del problema inventado, a partir de ocho variables organizadas en dos subcategorías: la complejidad sintáctica y la complejidad matemática. En la primera subcategoría se estudió la habilidad que tiene el estudiante para inventar problemas bien concebidos y tiene que ver con aquellas características que se relacionan con el orden, las relaciones de las palabras y símbolos que tiene el enunciado del problema (Puig & Cerdán, 1990). La segunda se refiere a la demanda cognitiva que presenta la tarea y se relaciona con la habilidad que tiene el estudiante para inventar problemas complejos desde el punto de vista matemático. A continuación, se describe cada una de las variables incluidas en las subcategorías mencionadas.

Complejidad sintáctica

La complejidad sintáctica se estudió con base en cuatro variables: longitud del enunciado, coherencia del enunciado, flexibilidad numérica y el tipo de pregunta. En cada una de éstas, excepto en las variables numéricas, se definieron una serie de indicadores que fueron utilizados para valorar con mayor profunidad las variables. A continuación se describen cada una de ellas y los indicadores definidos.

Longitud del enunciado. Se refiere a la cantidad de proposiciones presentes en el enunciado del problema (Espinoza, 2011). La pregunta del problema no se incluye como una proposición. Su valoración fue de acuerdo con la cantidad de proposiciones que presente y por tanto será de carácter numérica.

Coherencia del enunciado. Esta variable consiste en la formulación de problemas bien concebidos, en el sentido de que sean coherentes en relación con su estructura. Su estudio consistió en valorar la presencia o ausencia de los siguientes indicadores:

- Contiene todas sus partes (información, requerimientos, contexto y entorno matemático)
- La información no presenta contradicciones
- Existe relación entre los requerimientos y la información del problema
- Las expresiones matemáticas incluidas son coherentes

- No contiene errores semánticos
- Contiene la información necesaria para resolver el problema

Flexibilidad numérica. Esta variable está referida al tipo de número empleado por el estudiante y se estudió de acuerdo con la presencia o ausencia de los siguientes tipos de números:

- Naturales
- Racionales expresados en notación decimal
- Racionales expresados en notación fraccionaria
- Irracionales
- Complejos

De igual forma, se estudió la cantidad de tipos de números empleados:

- Solo un tipo de número
- Dos tipos de números
- Tres o más tipos de números

Tipo de pregunta. Se refiere al tipo de pregunta que presenta el problema, la cual puede ser de asignación, relacional o condicional. Una proposición interrogativa de asignación podría ser "cuántas personas viajaban en el tren", una relacional es una declaración como "¿cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?" mientras que una condicional es una sentencia como "Si María recorrió 300 metros más que Pedro, cuántos metros recorrió María". Se sostiene que un problema que incluya una pregunta de tipo condicional o relacional es más difícil de resolver que uno que presente una de asignación (Silver & Cai, 2005). Por tanto, para estudiar esta variable se emplearán los siguientes indicadores:

- La proposición interrogativa es de asignación
- La proposición interrogativa es relacional
- La proposición interrogativa es condicional

Complejidad Matemática

La complejidad matemática se estudió con base en cuatro variables: cantidad de pasos para ser resuelto, empleo de ideas complejas, nivel de complejidad según PISA y demanda cognitiva. En cada una de éstas, excepto en la cantidad de pasos para ser resuelto, se definieron indicadores que permitieron valorar con más detalle las variables. A continuación se describen cada una ellas y los indicadores definidos.

Cantidad de pasos para ser resuelto. Consiste en la cantidad mínima de pasos requeridos para resolver el problema. Para ello se empleó la estrategia utilizada por Espinoza (2011), que se centra en contar la cantidad de pasos distintos para resolver el problema, considerando que dos pasos son iguales si éstos conllevan el mismo procedimiento de cálculo. Su valoración fue de acuerdo con la cantidad de pasos que requiere el problema para ser resuelto y por tanto será de carácter numérica.

Empleo de ideas complejas. Se refiere a la inclusión de ideas complejas en el problema. Se considera que una idea es de este tipo si es difícil de comprender para estudiantes de su edad. Su estudio consistió en valorar únicamente si un estudiante empleó o no al menos una idea compleja.

Nivel de complejidad según PISA. Se relaciona con el nivel cognitivo que mostró el estudiante durante la actividad y que implica un mayor desarrollo de sus capacidades matemáticas. Para su estudio se emplearon las capacidades mencionadas en PISA (2006), a saber, reproducción, conexión y reflexión. A continuación, se describe brevemente cada una de ellas.

Entre las capacidades de reproducción se cuentan el conocimiento de los hechos y de las representaciones de problemas más comunes, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas comunes, la utilización de procesos rutinarios, la aplicación de algoritmos y habilidades de técnicas estándar, el manejo de fórmulas conocidas y la realización de operaciones sencillas. En síntesis, consiste en la reproducción de conocimientos ya practicados y la realización de operaciones rutinarias.

Las capacidades del grupo conexión se cimientan sobre la base de las capacidades del grupo de reproducción, pero involucra ideas de problemas cuyas situaciones no son tan rutinarias, aunque continúan siendo familiares o próximas al estudiante. En este tipo de problemas los estudiantes evidencian que comprenden conceptos matemáticos en contextos diferentes de aquellos en que fueron introducidos para su aprendizaje o en los que fueron practicados posteriormente. También incluye aquellos donde se establecen nexos entre distintas áreas de la Matemática y entre distintos modos de representación y comunicación.

En el grupo de reflexión se incluyen los problemas que requieren de un proceso de reflexión para resolverlo. Son problemas más creativos, originales y complejos que los del grupo de conexión. En este tipo de problemas los estudiantes evidencian que comprenden y emplean conceptos matemáticos en contextos complejos, reflexionando sobre ellos e incluso realizando generalizaciones sobre los resultados.

Los indicadores empleados para estudiar esta variable surgen de esos tres niveles:

- Nivel cognitivo de reproducción
- Nivel cognitivo de conexión
- Nivel cognitivo de reflexión

Demanda Cognitiva. Se relaciona con el esfuerzo intelectual o nivel de pensamiento que exige la tarea a los estudiantes para implicarse y resolverla con éxito. Para estudiarla se emplearon las categorías propuestas por Stein, Smith, Henningsen & Silver (2009) correspondientes a: memorización, algoritmo sin conexión, algoritmo con conexiones y hacer matemáticas. La primera incluye los problemas que implican reproducir fórmulas, reglas o definiciones; así como aquellos que se resuelven de forma inmediata, evocando a la memorización o sin realizar procedimientos.

Los problemas de algoritmo sin conexión requieren de un procedimiento para ser resueltos y resulta fácil observar un proceso para su solución. Los de algoritmo con conexión conllevan un esferzo cognitivo y de varios procedimientos para ser resueltos, por lo que su solución no es tan evidente. Además, a diferencia de los de algoritmo sin conexión, implican conectar diferentes conceptos matemáticos. Por último, los problemas clasificados como de haciendo matemáticas, implican conceptos complejos y no algorítmicos; así como una gran demanda cognitiva para resolverlos, ya que se debe analizar atentamente su enunciado. De igual forma, requieren de un análisis cuidadoso, el uso de aprendizajes previos y autorregulación de procesos cognoscitivos.

Los indicadores empleados para estudiar esta variable surgen de esos tres niveles:

- Demanda cognitiva de memorización

- Demanda cognitiva de algoritmo sin conexión
- Demanda cognitiva de algoritmo con conexión
- Demanda cognitiva de haciendo matemática

3.4.3 Pensamiento metacognitivo

La metacognición se refiere a cómo piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento los seres humanos (Silva, 2006). En este sentido, consiste en el conocimiento y control de la actividad cognitiva que ejerce el estudiante cuando se enfrenta a este tipo de tareas. Para estudiarla se analizó el control metacognitivo y los principios de autocorrección que mostraron los estudiantes durante el proceso de invención de problemas. A continuación, se describen las dos variables empleadas y los indicadores definidos en cada una de ellas.

Control metacognitivo. Consiste en los cambios que realiza el estudiante al problema de manera que evidencia el control sobre la actividad cognitiva de inventar problemas. Su estudio consistió en valorar la presencia o ausencia de los siguientes indicadores:

- Realizó cambios en la redacción
- Agregó nuevas proposiciones no semejantes
- Agregó nuevas proposiciones semejantes
- Realizó cambios en los requerimientos
- Realizó cambios en los datos numéricos

Principios de autocorrección. Se relaciona con las acciones que realiza el estudiante para verificar que el problema inventado es resoluble y que su solución es coherente en el contexto del problema. Su estudio consistió en valorar la presencia o ausencia de los siguientes indicadores:

- El problema siempre tiene una solución que es coherente de acuerdo con su contexto
- Realizó los cambios necesarios para que el problema sea resoluble
- Cambió los datos para que el resultado de las operaciones y la solución sean coherentes en el contexto del problema

3.4.4 Pensamiento divergente

De acuerdo con González & Domigues (2015), una persona con pensamiento divergente añade a partir de una sola idea varios y diversos pensamientos relacionados con la misma. Por tanto, para estudiarla se analizaron cinco variables: fluidez de ideas, creatividad, categoría de contenido matemático, campos de conocimiento y conexión entre los hechos. A continuación, se describe cada una de las variables citadas y sus indicadores.

Fluidez de ideas. Se refiere a la capacidad que tiene el estudiante de incluir en el enunciado del problema diversos pensamientos a partir de la situación propuesta. Por tanto, fue estudiada de acuerdo con la cantidad de proposiciones (Espinoza, 2011) no semejantes presentes en el enunciado del problema. Dos proposiciones son no semejantes si aportan diferente tipo de información al problema. Por ejemplo, de las siguientes proposiciones "Juan le da tres vueltas a la plaza", "María le da siete vueltas a la plaza" y "Pedro le da dos vueltas más que María", las dos primeras son semejantes pues aportan un mismo tipo de información, mientras que la tercera es una variación de las dos primeras, por lo que son no semejantes. La valoración de esta variable fue de acuerdo con la cantidad de proposiciones no semejantes presentes en el enunciado y por tanto será de carácter numérica.

Creatividad. Consiste en la creatividad que mostró el estudiante durante el proceso de invención de problemas y fue estudiada de acuerdo con tres indicadores que son los más empleados para determinar si una producción es creativa, a saber, fluidez, flexibilidad, originalidad (Kontorovich et al., 2011). Esta variable fue analizada con base en las producciones de la T1-C2, donde se pedía inventar tres problemas a partir de una imagen. Su estudio consistió en valorar los siguientes indicadores:

- El estudiante inventó tres problemas a partir de la situación propuesta (Fluidez)
- El estudiante inventó tres categorías diferentes de problemas a partir de la situación propuesta (Flexibilidad)
- El estudiante inventó al menos un problema poco frecuente a partir de la situación propuesta (Originalidad)

Categoría de contenido matemático. Se refiere al conjunto de contenidos de matemática que son básicos para la disciplina y que incluyen la diversidad de problemas en toda el área de la

Matemática. Para estudiar esta variable se utilizaron las categorías de contenido matemático incluidas en PISA (2012). A continuación, se describen cada una de las categorías empleadas.

Cambio y relaciones. Esta categoría incluye aquellos contenidos matemáticos que son fundamentales para describir, modelar e interpretar fenómenos de cambios como son las expresiones algebraicas, las ecuaciones y las desigualdades, las representaciones tabulares y gráficas. El cambio y las relaciones son evidente en problemas de crecimiento de organismos, los patrones climáticos, los niveles de empleo y las condiciones económicas.

Espacio y forma. Este contenido se relaciona con la geometría tradicional y aquellos contenidos relacionados con la visualización espacial y la medición. Se incluye en esta categoría una serie de actividades como la comprensión de la perspectiva, la transformación de las formas, la interpretación de las vistas de escenas tridimensionales y la construcción de representaciones de formas.

Cantidad. Este contenido se refiere a la aritmética y la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, las situaciones y las entidades del mundo. Esta categoría incluye el sentido numérico, la comprensión del significado de las operaciones, el sentido de la magnitud de los números, los cálculos mentales y las estimaciones.

Incertidumbre y datos. Este contenido corresponde a la Estadística y la Probabilidad e incluye la interpretación y presentación de los datos y el azar. Además, comprende la elaboración, interpretación y valoración de conclusiones extraídas donde la incertidumbre es fundamental.

Campos de conocimiento. Se refiere al (los) campo(s) de conocimiento en el que está inmerso el problema. Los siguientes son los valores de esta variable que se elaboraron inductivamente luego de revisar las producciones de los estudiantes:

- Aritmética
- Cálculo
- Ecuaciones
- Estereometría
- Física
- Funciones
- Geometría

- Geometría analítica
- Probabilidad
- Teoría de números

También se estudió la cantidad de campos de conocimiento empleados:

- Uno
- Dos
- Tres o más

Conexión entre los hechos. Se refiere a la cantidad de relaciones que establece el estudiante, ya sea con base en la información que proporciona la tarea o la que agrega durante el proceso de invención de problemas. Su valoración fue de acuerdo con la cantidad de relaciones establecidas y por tanto será de carácter numérica.

3.4.5 Riqueza de un problema matemático

Se relaciona con aquellos problemas que representan un verdadero desafío para los estudiantes dada las características que posee. En este estudio se considera que un problema matemático es rico si presenta las siguientes características: el enunciado es extenso, emplea diferentes tipos de números, implica varios pasos para ser resuelto, incluye varios campos de conocimiento, presenta un alto nivel de complejidad según la clasificación de PISA, requiere una alta demanda cognitiva, evidencia control metacognitivo, evidencia principios de autocorrección en la resolubilidad del problema y presenta fluidez de ideas. Estas variables fueron elegidas a posteriori del análisis de datos, ya que los análisis estadísticos confirmaron diferencias significativas entre grupos.

Para valorar la riqueza del problema inventado se definieron algunos criterios y niveles de actuación representados por valores numéricos ordenados de forma ascendente, que van desde las cuestiones más sencillas a aquellas que indican que el estudiante demuestra un mayor dominio de la tarea.

Así, la calificación de la riqueza de un problema matemático podía oscilar entre las puntuaciones 9 y 22, valor que se calculó sumando los puntos obtenidos en cada uno de los criterios definidos, de modo que a mayor puntuación mayor riqueza del problema. Luego, para determinar la riqueza general obtenida por un estudiante, se calculó una media artimética simple de la riqueza obtenida en cada uno los problemas que inventó. En la siguiente tabla se presentan los niveles de actuación definidos en cada una de las variables consideradas.

Tabla 3.1
Rúbrica para valorar la riqueza de los problemas matemáticos.

Variable	Criterios	Nivel
Extensión del enunciado	1-3 proposiciones	1
	4-6 proposiciones	2
	7 o más proposiciones	3
Flexibilidad numérica	Emplea más de un tipo de número	1
Cantidad de pasos para ser resuelto	1-2 pasos	1
	3-4 pasos	2
	5 o más pasos	3
Cantidad de campos de conocimiento	Emplea más de un campo de conocimiento	1
Complejidad según PISA	Reproducción	1
	Conexión	2
	Reflexión	3
Demanda cognitiva	Memorización	1
	Algoritmo sin conexión	2
	Algori tmo con conexión	3
	Haciendo matemática	4
Control metacognitivo	Realizó cambios al problema	1
Fluidez de ideas	1-2 proposiciones	1
	3-4 proposiciones	2
	5 o más proposiciones	3
Conexión entre los hechos	Una relación	1
	Dos relaciones	2
	Tres o más relaciones	3

Por último, se definieron tres niveles de riqueza con base en el análisis de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en la riqueza general de los problemas. Los niveles y las puntuaciones definidas son las siguientes: bajo (7-11), medio (12-15) y alto (16-22).

3.4.6 Riqueza en la reformulación de problemas

Corresponde a la capacidad que mostró el estudiante de reformular con mayor riqueza un problema. Esta variable se analizó con base en los enunciados inventados en la T1-C3 y T2-C4. En la primera se les pidió reformular un problema que primero debían resolver y en la segunda reformularon un problema que ellos mismos habían inventado en la T1-C4.

Para valorar la riqueza en la reformulación de problemas a partir de la T1-C3, se empleó la rúbrica diseñada para valorar la riqueza de los problemas que fue descrita en la sección 3.4.5 de esta memoria. En el caso de los enunciados inventados con base en la T2-C4, se elaboró una rúbrica que valoró el cambio realizado a estos problemas de acuerdo con la presencia o ausencia de los siguientes indicadores:

a) Presenta una mayor cantidad de proposiciones
b) Incluye más tipos de números
c) Requiere más pasos para ser resuelto
d) Incluye más campos de conocimiento
e) Incrementa su complejidad según la clasificación de PISA (2012)
f) Presenta mayor fluidez de pensamiento
g) Presenta mayor cantidad de conexiones entre los hechos
h) Presenta mayor nivel de demanda cognitiva

Así, la riqueza en la reformulación de problemas se concibe como la suma de las puntuaciones obtenidas en los indicadores de cambio presentes en cada problema inventado, por lo que su puntuación podía variar de 0-8; de manera que a mayor puntuación obtenida con base en la rúbrica, mayor riqueza presentaba la reformulación del problema. Luego estas puntuaciones fueron clasificadas en los siguientes tres niveles de riqueza en la reformulación de problemas: bajo (0-2), medio (3-5) y alto (6-8). Se decidió que si los estudiantes obtienen en las variables “cantidad de tipos de números”, “complejidad según PISA” y “nivel de demanda cognitiva” la mayor puntuación posible en ambas tareas, entonces los indicadores b), e) y g) estaban presentes, dado que el estudiante no podía realizar un incremento en tales variables.

Por otra parte, se consideró analizar si el problema planteado era resoluble y si el estudiante había sido capaz de resolverlo. A continuación, se describe cada una de estas variables y los indicadores definidos.

Resolubilidad del problema. Concierne a la resolubilidad del problema planteado. Para su estudio se consideró si el problema es resoluble o no.

Resolución correcta del problema. Corresponde a la resolución del problema por parte del estudiante. Para su estudio se definieron los siguientes indicadores:

- El estudiante intenta resolver el problema, pero no concluye o no lo resuelve correctamente
- El estudiante resolvió el problema correctamente

3.5 Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Antes de estudiar las producciones de ambos grupos de estudiantes fue necesario decidir cuáles de ellas serían valoradas. Para ello, se determinó si las producciones de los estudiantes correspondían a problemas matemáticos, problemas no matemáticos o producciones en blanco. Dentro de los problemas no matemáticos están aquellos que presentan alguna ambigüedad, que no contienen todas sus partes (información, datos, requerimientos) o que no presentan relación entre la información y los requerimientos.

Dentro de las producciones se encontraron problemas matemáticos no resolubles que presentan características importantes de analizar. Por tanto, éstas se clasificaron en enunciados que contienen alguna contradicción, presentan alguna incompatibilidad matemática o que son incompletos. Los primeros corresponden a producciones que agregan alguna condición en la información que resulta negada durante la solución del problema.

Los problemas con incompatibilidad matemática presentan inconsistencias de tipo numérico o conceptual. Las inconsistencias numéricas se dan porque la solución del problema no es coherente en el contexto del mismo o porque se incluye alguna información numérica que tampoco lo es. Por ejemplo, un problema que considere que el tren tiene una capacidad máxima de 294 pasajeros y que en cada vagón viajan la misma cantidad de pasajeros muestra incompatibilidad matemática por inconsistencia numérica, ya que 294 no es divisible por 4. De igual forma, si un problema afirma que la capacidad máxima del tren es de 294 pasajeros, pero de los datos suministrados se concluye que la capacidad sobrepasa dicha cantidad, entonces presentan inconsistencia de tipo numérica. Un problema con incompatibilidad matemática de tipo conceptual es aquel que presenta una ambigüedad en el uso de algún concepto implicado en el problema. Por ejemplo, hacer referencia al área lateral de un círculo.

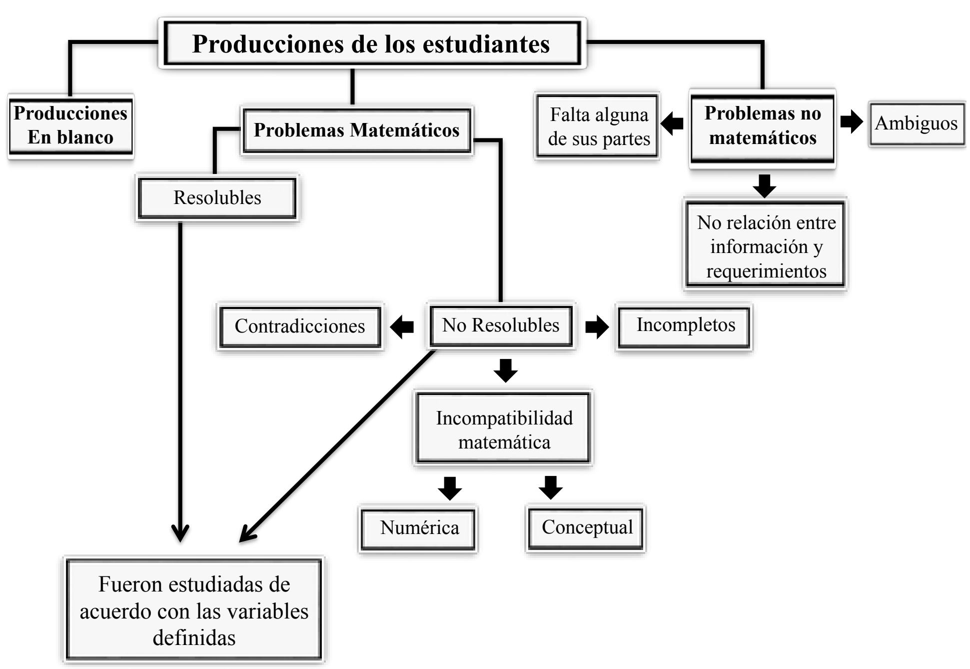
Por último, los problemas incompletos corresponden a enunciados que contienen todas sus componentes (información, requerimientos, contextos y obstáculo), pero que le falta algún dato que es necesario para resolverlo. Estos problemas fueron analizados porque en la solución que proporciona el estudiante se observó la inclusión de dicha información.

Así, luego de clasificar las producciones de los estudiantes, se decidió que los problemas matemáticos, sin importar su resolubilidad, fueran estudiados con base en las seis categorías definidas.

Es importante mencionar que si un estudiante inventó más de un problema en alguna de las tareas donde se le pedía inventar solo una, se decidió tomar el de mayor dificultad puesto que en cada tarea se les pidió plantear un problema difícil.

La siguiente figura muestra el esquema que resumen el proceso empleado para valorar las producciones de los estudiantes.

Figura *1. Esquema para analizar las producciones de los estudiantes*



3.6 Proceso de caracterización de los sujetos con talento matemático

Una vez definido el esquema de análisis, se procedió a estudiar las producciones de los estudiantes con el fin de extraer aquellas variables que caracterizan a los estudiantes con talento cuando inventan problemas matemáticos.

Para ello, en las variables no numéricas se definieron indicadores que fueron valorados con "0" o "1", donde "0" indicaba la ausencia de esta característica en el enunciado del problema y "1" su presencia. En las variables numéricas como longitud del enunciado, cantidad de pasos para ser resuelto o fluidez de ideas, su valoración podría tomar cualquier número natural. Para facilitar la posterior valoración de los problemas se elaboró una rúbrica que incluía las variables y los indicadores definidos en cada una de ellas (Ver anexo C).

Una vez analizadas todas las producciones, se elaboró y completó una base de datos en SPSS v22 con las valoraciones incluidas en la rúbrica antes mencionada. Luego se procedió a realizar un análisis de frecuencia para cuantificar y contrastar la presencia o ausencia de los indicadores en las producciones de los estudiantes.

Esto permitió identificar aquellas variables en las que se encontraron diferencias y se procedió a realizar pruebas de normalidad e hipótesis con un nivel de confianza de 95% para confirmar estadísticamente las diferencias encontradas en las variables cuantitativas. Para analizar las diferencias en las variables cualitativas se realizó un análisis bivariante mediante tablas de contingencias empleando para ello la prueba de Chi-cuadrado con un nivel de confianza del 95% en los casos donde el 80% de las casillas tuvieron una frecuencia esperada superior a cinco.

Posterior a esto se procedió a realizar el estudio de la riqueza de los problemas planteados por ambos grupos. Para ello se empleó la rúbrica diseñada para tal fin y se calculó el promedio de las puntuaciones obtenidas en cada uno de los problemas inventados para obtener la riqueza general. Luego se realizaron las pruebas estadísticas correspondientes para determinar si las diferencias encontradas eran estadísticamente significativas. Por último, las puntuaciones generales fueron clasificadas en los tres niveles de riqueza general definidos y se realizó el contraste entre ambos grupos.

Para finalizar el análisis de los datos, se estudió la riqueza en la reformulación de problemas de ambos grupos empleando la rúbrica diseñada para ello. Luego se realizaron las pruebas respectivas para determinar si las diferencias encontradas eran estadísticamente significativas. De igual forma se clasificaron las puntuaciones obtenidas en los tres niveles definidos y se realizó el contraste para determinar si existían diferencias en dichos niveles.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al analizar las producciones de los estudiantes ante las tareas de invención de problemas propuestas en esta investigación. Para ello se definieron 22 variables de estudio que fueron organizadas en seis categorías de análisis, las cuales son descritas en el apartado 3.4 de la sección de metodología de esta memoria.

En primera instancia se exponen las características generales de los problemas, que incluyen la cantidad total de producciones obtenidas y su clasificación, así como la resolubilidad y resolución correcta del problema. Luego se muestran los resultados de acuerdo con las variables estudiadas en cada una de las categorías de análisis definidas. Además, se estudió el comportamiento de cada una de estas variables según el tipo de cuestionario.

Para ello se realizó un análisis estadístico de frecuencias mediante el paquete estadístico SPSS versión 22[3] que permitió cuantificar y contrastar la presencia o ausencia de dichas características en ambos grupos de estudiantes. De igual forma, se realizaron pruebas de normalidad e hipótesis y se estableció un nivel de confianza del 95% (error muestral del 5%) para confirmar estadísticamente las diferencias encontradas en las variables cuantitativas. Para estudiar las diferencias en las variables cualitativas, se realizó un análisis bivariante mediante tablas de contingencias y se empleó la prueba de Chi-cuadrado con un nivel de confianza del 95% en los casos donde el 80% de las casillas tuvieron una frecuencia esperada superior a cinco. Esta prueba se aplicó con el objetivo de contrastar la hipótesis nula de igualdad de comportamiento entre los grupos, de modo que si la prueba es significativa entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye diferencias de comportamiento entre los grupos de estudiantes.

Por último se muestran los resultados con respecto a la fiabilidad y validez del instrumento.

A continuación, se presentan los resultados sobre las características generales de las producciones de ambos grupos de estudiantes.

[3] https://www.ibm.com/analytics/es/es/technology/spss/

4.1 Características generales de los problemas inventados

Primeramente, recordar que para facilitar la organización y presentación de dichas producciones, decidimos llamar al grupo de estudiantes del Colegio Científico de Costa Rica, sede Universidad Nacional, Región Brunca, que participaron en este estudio “grupo talento”, el cual abreviamos como GT y a los estudiantes del colegio público estándar “grupo estándar”, abreviado GE. Además, en la transcripción de las producciones se utilizó una codificación con 8 caracteres, de manera que los primeros cuatro indican el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes el número de tarea y cuestionario. Por ejemplo, el código 09GE-T1-C2 se refiere a la producción del estudiante número 9 del grupo estándar, al contestar la tarea 1 del cuestionario 2.

En primera instancia se obtuvieron 303 problemas matemáticos de 315 posibles (96,19%), pues se encontraron siete producciones en blanco (cinco del grupo estándar y dos del grupo talento), dos sin requerimientos y tres ambigüos, todos estos planteados por el grupo talento. De los 303 enunciados, 154 corresponden a problemas matemáticos inventados por el grupo talento y 149 por el grupo estándar. En la tabla 4.1 se muestra la distribución de las producciones de los estudiantes de ambos grupos.

Tabla 4.1

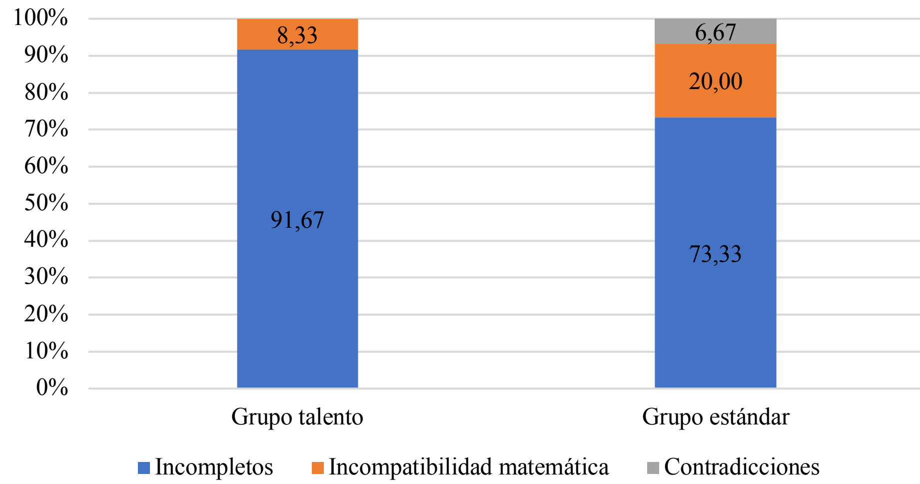
Distribución de las producciones de los estudiantes

Tipo de producción	Grupo talento		Grupo estándar		Total	%
	Frecuencia	%	Frecuencia	%		
Problemas matemáticos	154	95,65	149	96,13	303	96,19
Producciones en blanco	2	1,24	5	3,87	7	2,22
Problemas sin requerimiento	2	1,25	0	0,00	2	0,63
Problemas ambigüos	3	1,88	0	0,00	3	0,95
Total	161	100,00	154	100,00	315	100,00

Con respecto a la resolubilidad de los problemas matemáticos, resultó que el 91,09% de los inventados por ambos grupos son resolubles (276 problemas). Específicamente se obtuvo que el 92,20% de los poblemas del grupo talento (142 enunciados) y el 89,93% del grupo estándar (134 enunciados) se clasifican como resolubles.

En relación con los 27 problemas no resolubles, resultó que 12 fueron inventados por el grupo talento y 15 por el grupo estándar. De éstos, el 81,48% (22 enunciados) son incompletos porque no presentan toda la información necesaria para ser resueltos, el 14,81% (4 enunciados) presentaban alguna incompatibilidad matemática y el 3,70% (un enunciado) contienen alguna contradicción. En el siguiente gráfico se muestran los resultados con respecto a la resolubilidad de los problemas inventados de acuerdo con el grupo.

Gráfico 1. Problemas no resolubles por grupo

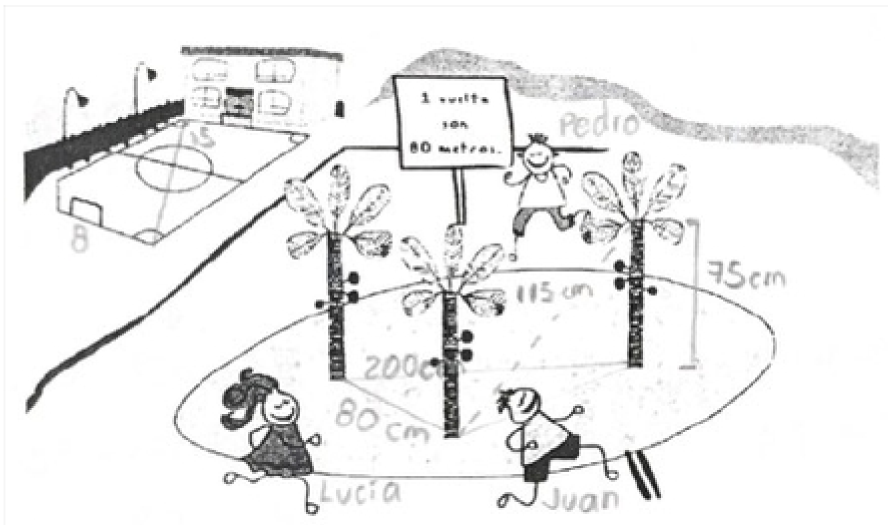


Como se aprecia en el gráfico anterior, los problemas no resolubles del grupo talento corresponden prácticamente a enunciados incompletos. De igual forma sucedió con los no resolubles planteados por el grupo estándar, ya que el 73,33% son incompletos, aunque este grupo también formuló problemas que presentaban alguna incompatibilidad matemática o contradicción.

Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente: "Si el tren puede llevar un total de 1000 kg y se llevan 1768 kg de mercancías, cuál es la cantidad máxima de personas que pueden ir en cada vagón tal que sea la misma cantidad de personas en cada una de ellas? (03GT-T1-C1). Este enunciado es incompleto porque faltó indicar que el peso restante es para los pasajeros.

El siguiente es un problema que presenta una incompatibilidad matemática de tipo conceptual porque un círculo no tiene área lateral: "Si un círculo tienen un área lateral de 36cm^2 y un área basal de 20cm^2. Determine la medida de su radio, su diámetro y su área total" (15GT-T2-C4).

El problema que presenta una contradicción porque de acuerdo con la información que muestra la estudiante se forma un triángulo isósceles, pero en realidad no es así, es el siguiente: “Si los árboles forman un triángulo isósceles, la altura de uno de ellos es 75 cm y la medida de la copa hasta la base del otro árbol es de 115 cm. Las otras medidas son 200 cm y 80 cm de distancia entre los árboles ¿Cuál es el área de ese triángulo?” (01GE-T1-C2). La imagen que presenta la estudiante es la siguiente:



En cuanto al tipo de cuestionario y esta variable, resultó que no se encontraron diferencias significativas, por lo que se distribuyen de forma similar en cada cuestionario (Chi-cuadrada=4,07, gl=3, p<0,254).

Por último, resultó que el 89,61% y 91,95% de los problemas planteados por el grupo talento y estándar respectivamente fueron resueltos correctamente. Tampoco se encontraron diferencias significativas con respecto a esta variable y el tipo de cuestionario (Chi-cuadrada=5,92, gl=3, p<0,115).

A continuación se presentan los resultados de acuerdo con las categorías de análisis definidas.

4.2 Análisis según el contexto del problema

En esta sección se estudió el contexto inmerso en el problema. Para ello se analizó el contexto matemático, así como el contexto y su relevancia según PISA. A continuación se presentan los resultados de acuerdo con estas variables.

Contexto matemático del problema

En esta variable se estudió si el problema está implicado en una situación real. Al respecto, la tabla 4.2 muestra que un alto porcentaje de los enunciados inventados por ambos grupos corresponden a un contexto extra matemático (85% aproximadamente), ya que presentan una situación vinculada con una situación real. El restante 14% son intra matemáticos, pues se suscriben a un contexto meramente matemático que está desvinculado de una situación de la vida real. Al realizar el análisis estadístico, no se encontraron diferencias significativas, por lo que las variables grupo de estudiantes y tipo de contexto matemático son independientes (Chi-cuadrada=0,02, gl=1, p<0,967). Un problema inventado por un estudiante del grupo talento que se clasifica como intra matemático es el siguiente: "Calcule el área de una esfera de radio 5 cm" (07GT-T2-C1).

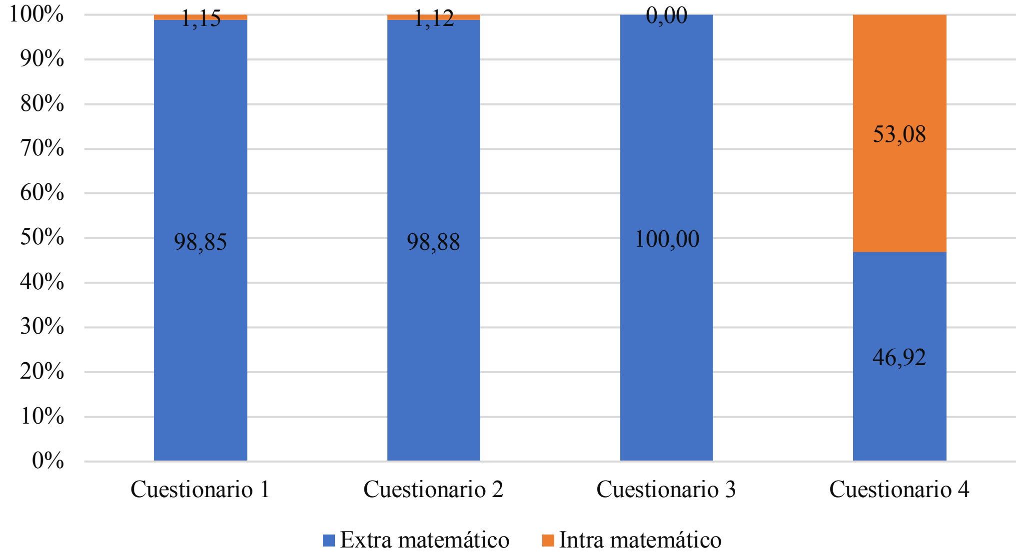
Tabla 4.2

Tipo de contexto matemático empleado.

Contexto matemático	Grupo talento		Grupo estándar		Total	%
	Frecuencia	%	Frecuencia	%		
Intra matemático	23	14,94	22	14,77	45	14,85
Extra matemático	131	85,06	127	85,23	258	85,15
Total	154	100,00	149	100,00	303	100,00

En relación con el tipo de cuestionario y esta variable, se encontró que prácticamente todos los enuanciados de los cuestionarios C1, C2 y C3 están implicados en un contexto extra matemático; mientras que en el C4 se plantearon aproximadamente la misma cantidad de cada tipo de contextos. Llama la atención que en los cuestionarios C1, C2 y C3 no se plantearon prácticamente enunciados en un contexto intra matemático, lo cual puede deberse a los tipos de tareas propuestas en estos cuestionarios, ya que hacían alusión a contextos cercanos a los estudiantes y consistían en tareas estructuradas o semi-estructuradas; mientras que en el C4 no se les propuso ninguna situación en particular, sino que debían inventar un problema sin ninguna restricción (situación libre de invención de problemas). El análisis estadístico reveló diferencias significativas por cuestionarios (Chi-cuadrada=127,85, gl=3, p<0,00). Los resultados se muestran en el gráfico 2.

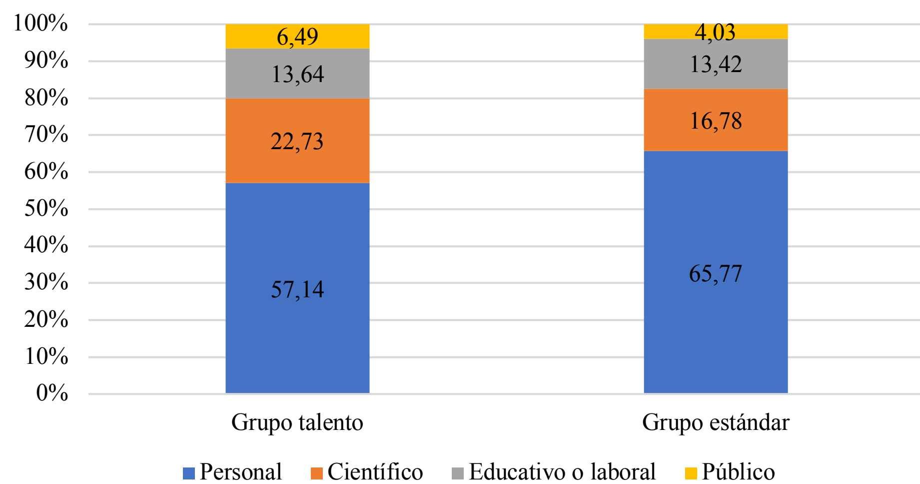
Gráfico 2. Contexto matemático. Porcentaje por cuestionario



Tipo de contexto según PISA

También se estudió si el contexto implicado en el problema estaba relacionado con una situación personal, educativo/laboral, social o científico. En el gráfico 3 se presentan los resultados con respecto a esta variable.

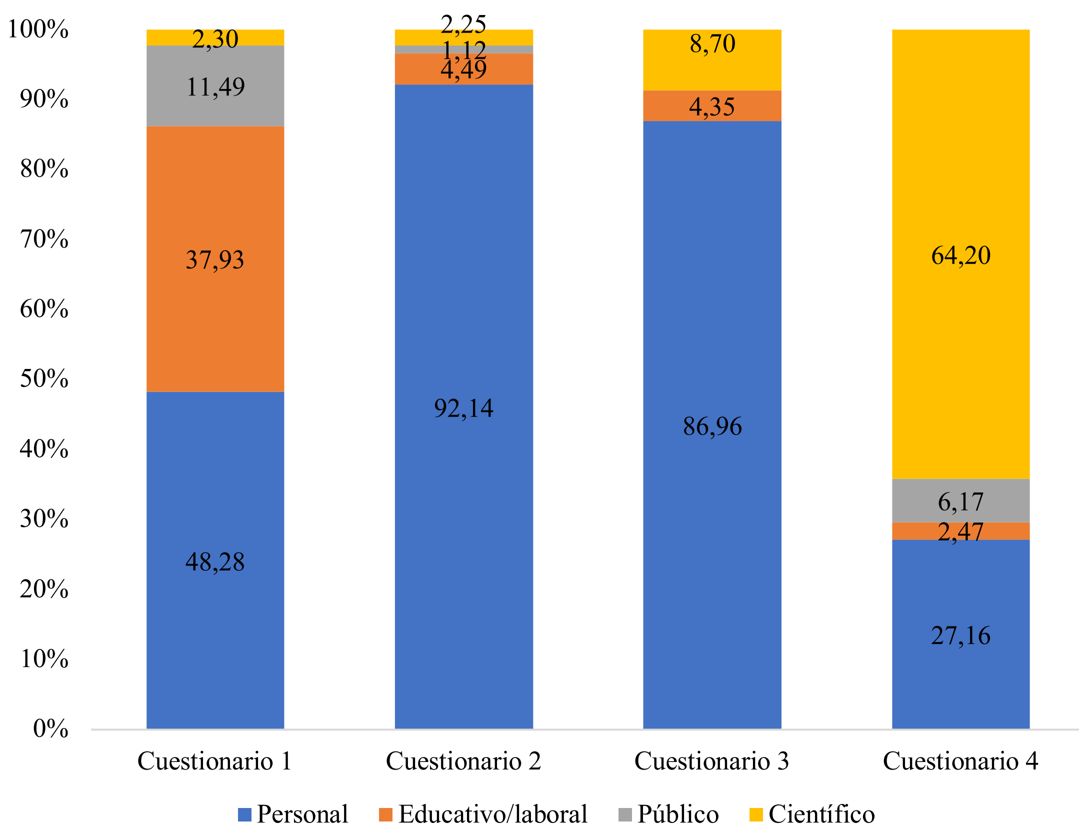
Gráfico 3. Tipo de contexto según PISA por grupo



Como se aprecia en el gráfico anterior, la mayoría de problemas de ambos grupos aluden a un contexto personal que hace referencia a situaciones cercanas a ellos, como son el hacer deporte, ir al cine, hacer compras, jugar, entre otros. Luego, los estudiantes se inclinaron por inventar problemas con un contexto científico, ya que el 22,73% y 16,78% de los enunciados del grupo talento y estándar son de este tipo. Estos problemas tienen la particularidad que corresponden a enunciados meramente matemáticos que no presentan un contexto relacionado con la vida real. Por último, llama la atención que los estudiantes inventaron pocos problemas en un contexto social. El análisis estadístico muestra que no se pueden establecer diferencias significativas entre los grupos de estudiantes y esta variable (Chi-cuadrado=3,14, gl=3, $p<0{,}37$).

Con respecto al tipo de contexto empleado en cada cuestionario, resultó que la mayor cantidad de problemas relacionados con un contexto personal se inventaron en el C2 y C3, mientras que en el C1 fue donde se encontraron más enunciados relacionados con un contexto educativo/laboral y público. Por último, es interesante que los estudiantes eligieran el C4 para plantear problemas en un contexto científico, pues esta es una tarea abierta, donde el estudiante inventó problemas sin ninguna restricción. En el siguiente gráfico se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Gráfico 4. Tipo de contexto empleado. Porcentaje por cuestionario

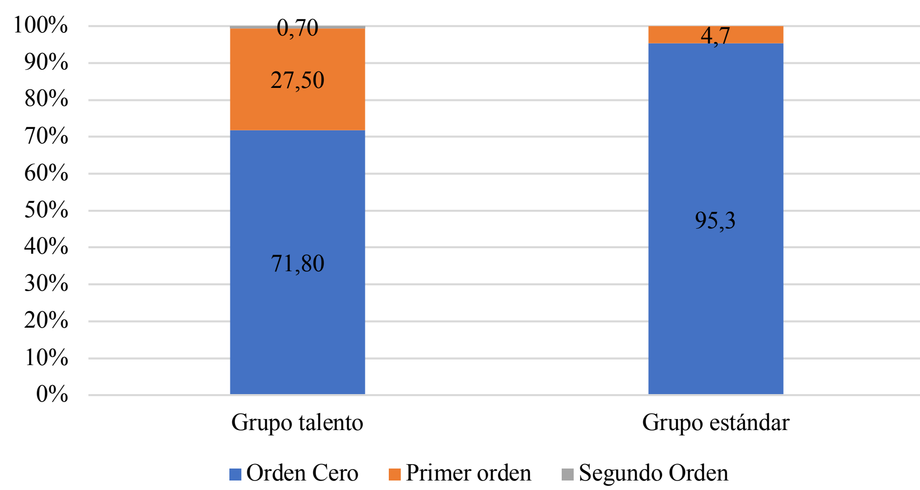


Del gráfico anterior también se puede apreciar que en el C1 se plantearon el 48,28% y 37,93% de los problemas con un contexto personal y educativo/laboral respectivamente; mientras que en esta tarea prácticamente no se generaron problemas inmersos en un contexto científico, como sí ocurrió en el C4, donde el 64,20% de los enunciados presentan este contexto. Además, resultó que en el C2 y C3 prevalecieron los enunciados inmersos en un contexto personal (92,13% y 86,96% respectivamente); más no así los que presentan un contexto social, ya que la cantidad de problemas que lo tienen es prácticamente nula. El análisis estadístico reveló que existen diferencias significativas por cuestionarios y el tipo de contexto empleado (Chi-cuadrado=212,96, gl=9, p<0,00).

Relevancia del contexto

En esta sección se analizó la importancia que tiene el contexto en la solución del problema. Para ello se estudiaron las 253 producciones cuyo contexto es extra matemático, ya que están vinculadas con alguna situación de la vida real. En el gráfico 5 se muestran los resultados de esta variable.

Gráfico 5. Relevancia del contexto por grupo



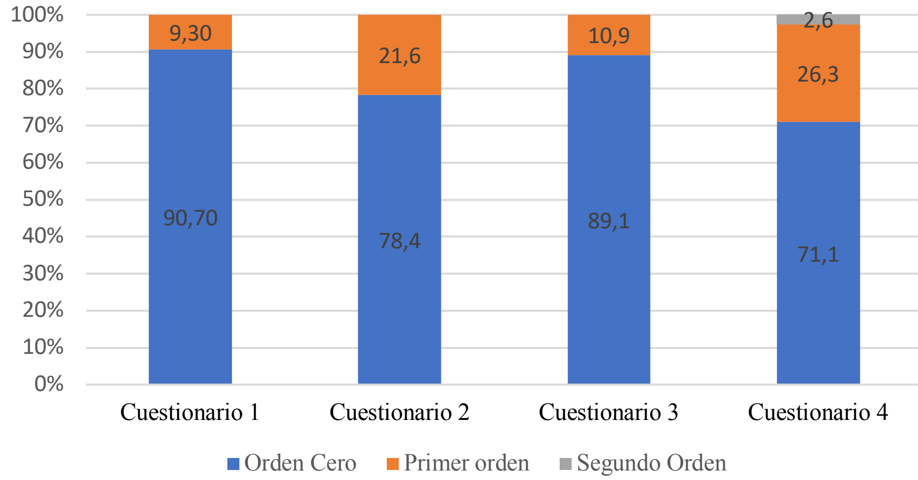
De acuerdo con el gráfico 5, los problemas de ambos grupos presentan un contexto que no es necesario en su solución, sino que fue incluido para hacer creer que estaba inmerso en una situación real, puesto que su relavancia es de orden cero. Otro aspecto a resaltar es que los estudiantes del grupo estándar plantearon muy pocos problemas donde el contexto es necesario para resolverlo (4,7%); mientras que el grupo talento inventó una mayor cantidad de este tipo (28,30%). El análisis estadístico muestra que existen diferencias en cuanto a la relevancia del contexto por grupo (Chi-cuadrado=25,68, gl=1, p<0.00).

Un problema inmerso en un contexto personal con relevancia de orden cero es el siguiente: "En el cine, Barahona invitó a Allison a ver una película. Él decide comprar las entradas cada una con un valor de ¢2600 y también compra los frescos y palomitas con un costo de ¢4000. Si Barahona tiene ¢10000 ¿Cuánta plata le sobra para pagar el bus?" (8GE-T2-C1).

El siguiente es un problema donde el contexto es educativo/laboral y su relevancia es de primer orden, ya que éste es necesario para resolver el problema y analizar la razonabilidad de la respuesta, pero en su solución no se da un proceso profundo de matematización: "En el trayecto el tren hace tres paradas, en la primera baja un tercio de la cantidad inicial de pasajeros y se montan 22. En la segunda se bajan la mitad de los pasajeros e ingresan 9. En la última parada, en la cual se baja sólo $\frac{1}{10}$ de los pasajeros que llevaba y no sube nadie. El chofer del tren se da cuenta que recibirá un castigo si en algún momento del trayecto (desde que salió de Cartago) ha ecxedido el límite de carga en los vagones de mercancias. Si cada pasajero llevó en promedio 12 kg de equipaje (maletas, bultos y otros) y estos son almacenados en dos vagones de mercancias y ya en Alajuela se bajan 81 personas. ¿Recibirá una amonestación el conductor?" (05GT- T1-C1).

En relación con el tipo de cuestionario, el gráfico 6 muestra que en todos ellos predominaron los enunciados cuyo contexto presentan una relevancia de orden cero. Al realizar el análisis estadístico sobre si es necesario el contexto para resolver el problema y el tipo de cuestionario, resultó que existen diferencias significativas (Chi-cuadrado=14,75, gl=6, $p < 0.02$). Por tanto, se concluye que en el C4 es donde se plantean la mayor cantidad de problemas que requieren de su contexto para ser resueltos, seguido del C2.

Gráfico 6. Relevancia del contexto por cuestionario



4.3 Análisis según la complejidad del problema

En esta seccion se presenta el análisis de la complejidad de los problemas inventados por ambos grupos de estudiantes a partir del estudio de dos subcategorías: complejidad sintáctica y complejidad matemática. La complejidad sintáctica se estudió con base en cuatro variables: longitud del enunciado, coherencia del enunciado, flexibilidad numérica y tipo de pregunta; mientras que la complejidad matemática se analizó con base en cuatro variables: cantidad de pasos para resolver el problema, empleo de ideas complejas, nivel de complejidad según PISA y demanda cognitiva según Stein, Smith, Henningsen & Silver (2009). También se estudiaron las diferencias en la complejidad matemática y sintáctica de los problemas planteados según el tipo de cuestionario.

Cabe señalar que los resultados se obtuvieron a partir del análisis de 303 producciones que corresponden a los problemas matemáticos, 154 inventados por el grupo talento y 149 por el grupo estándar. Del análisis se excluyeron las producciones en blanco (7 problemas), los problemas sin requerimientos (2 problemas) y los problemas ambigüos (3 enunciados).

El siguiente es un ejemplo de problema ambigüo, porque la relación en la primera secuencia es distinta que en la segunda:

"Carlitos da tres secuencias de números (7,9,4), (8,5,3). ¿Cuál es el valor faltante en (4,2,x) si no se pueden repetir números?".

A continuación se presentan los resultados de cada subcategoría y las variables correspondientes.

Complejidad sintáctica

La complejidad sintáctica se refiere a la capacidad del estudiante para inventar problemas bien concebidos desde el punto de vista de su estructura, las partes que lo componen y la coherencia matemática de los conceptos empleados. Además, se relaciona con la extensión del problema, el tipo y la cantidad de números que emplea, así como la pregunta que incluye en el enunciado. A continuación se presentan los resultados obtenidos al estudiar los problemas matemáticos inventados por ambos grupos, de acuerdo con las variables relacionadas con esta categoría.

Longitud del enunciado

Para estudiar la longitud del enunciado se empleó la estrategia definida por Espinoza (2011), quien la concibe como la cantidad de proposiciones presentes en el mismo y que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables.

Al respecto, resultó que el promedio general de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas planteados por el grupo talento (5,55) es mayor que la media del grupo estándar (4,00). Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, mediante la prueba de Mann-Whitney se verificó que existen diferencias significatvas entre la cantidad media de proposiciones que contienen los problemas de ambos grupos, ya que el p-valor asociado es 0,0.

Estas diferencias también se reflejaron en la cantidad de problemas que poseen cinco o más proposiciones, ya que el 64,5% de los problemas planteados por el grupo talento presentan dicha característica, en contraste con el 30,9% de los inventados por el grupo estándar que contienen esta misma cantidad de proposiciones.

Otro aspecto a resaltar es que la mayoría de enunciados planteados por el grupo estándar (63,1%) tienen entre dos a cuatro proposiciones, mientras que el 46,5% de los inventados por el grupo talento se caracterizan por estar compuestos por seis o más proposiciones. En la tabla 4.3 se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Tabla 4. 3

Cantidad de proposiciones en los encunciados

Cantidad de proposiciones	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Una proposición	5	3,23	9	6,04
Dos proposiciones	18	11,61	26	17,45
Tres proposiciones	13	8,39	38	25,50
Cuatro proposiciones	19	12,26	30	20,13
Cinco proposiciones	28	18,06	18	12,08
Seis proposiciones	24	15,48	10	6,71
Siete proposiciones	18	11,61	7	4,70
Ocho o más proposiciones	30	19,35	11	7,38
Total	155	100,00	149	100,00

En cuanto a la longitud de los problemas según el cuestionario, se encontró que en el C1 fue donde se plantearon problemas más extensos, pues su media fue de 5,41; seguido del C3 donde se presentan cinco proposiciones por enunciado. En contraposición, en el C4 fue donde se plantearon problemas menos extensos, ya que están compuestos por 3,89 proposiciones en promedio. Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es menor a 0,01 en cada uno de los grupos. Al realizar el análisis estadístico, se constata mediante la prueba de Kruskal Wallis que existen diferencias significativas, entre la cantidad media de proposiciones presentes en los cuatro cuestionarios, ya que el valor p asociado corresponde a 0,01.

Las tareas en las que se plantearon problemas más extensos son la T2-C2 seguido de la T1-C1, cuyo promedio de cantidad de proposiciones es de 5,98 y 5,48 respectivamente. Sin embargo, esto contrasta con la cantidad de proposiciones no semejantes incluidas en dichos problemas, ya que la media es mayor en los planteados con base a la T1-C1 (3,57) que en la T2-C2 (3,07).

Específicamente en la tarea T2-C2 se les pidió a los estudiantes inventar problemas con base en una imagen que contenía productos del supermecado. Esto provocó que fueran extensos, ya que contenían varias proposiciones semejantes relacionadas con una lista de productos y sus respectivos precios, que luego debían sumar para calcular el monto total de la compra. El siguiente es un problema que ilustra lo explicado anteriormente: “Marta va al supermercado con ¢25000 y compra dos paquetes de cereal Nesquile (¢2500), una salsa de tomate (¢1500), tres refrescos tropical (¢3150), un combo de atunes (¢8600), un paquete de fresco (¢2000), un pan Bimbo (¢2600), un jugo (¢750). ¿Le alcanza el dinero para comprar todos los productos?” (05GE-T2-C2)

Por tanto, aunque con base en la T2-C2 se plantearon problemas extensos, la producción de ideas diferentes fue más en los problemas planteados con base en la T1-C1. Por último, los problemas menos extensos fueron planteados con base en la T2-C4, seguido de la T1-C2.

Coherencia del enunciado

Para estudiar esta variable se analizó si el enunciado del problema contenía todas sus partes (información, requerimientos, contexto y entorno matemático), si la información presentaba alguna contradicción, si la información tenía relación con los requerimientos y si los conceptos matemáticos utilizados eran coherentes.

De acuerdo con la tabla 4.4, ambos grupos plantearon una gran cantidad de enunciados coherentes, ya que al menos el 97% de ellos no presentan ningún inconveniente. Por tanto, se pone de manifiesto que ambos grupos conocen los elementos que conforman un problema matemático. A pesar de que 3% presenta alguna inconsistencia, estos sí fueron analizados porque al estudiar la solución del problema los estudiantes corregían algunos de estos errores o se podía comprender mejor el problema planteado. Por ejemplo, el siguiente es un enunciado que contiene una contradicción, ya que no es posible que Pedro conduzca el doble de Juan y que Juan conduzca 80 km más que Pedro: “En ese mismo día, luego de llegar a casa, de emergencia tuvieron que hacer otro viaje, solo que Arturo condujo lo de Juan (50Km), Pedro el doble de Juan y Juan 80km más que Pedro. ¿Cuántos kilómetros recorrieron en total ese día?” (07GE-T1-C3).

Tabla 4.4

Coherencia del enunciado

Variables	Grupo talento		Grupo estándar		Total	%
	Frecuencia	%	Frecuencia	%		
Contiene todas sus partes	154	100,00	149	100,00	303	99,67
No presenta contradicciones	153	99,35	143	95,97	296	97,37
Existe relación entre la información y los requerimientos	154	100,00	147	98,66	301	99,01
Expresiones matemáticas coherentes	153	99,35	145	97,32	298	98,03

Flexibilidad numérica

La flexibilidad numérica se analizó de acuerdo con el tipo de número empleado y la cantidad de diferentes tipos de éstos incluidos en el enunciado del problema. Los resultados se muestran en la tabla 4.5.

Tabla 4.5

Tipo de número empleado

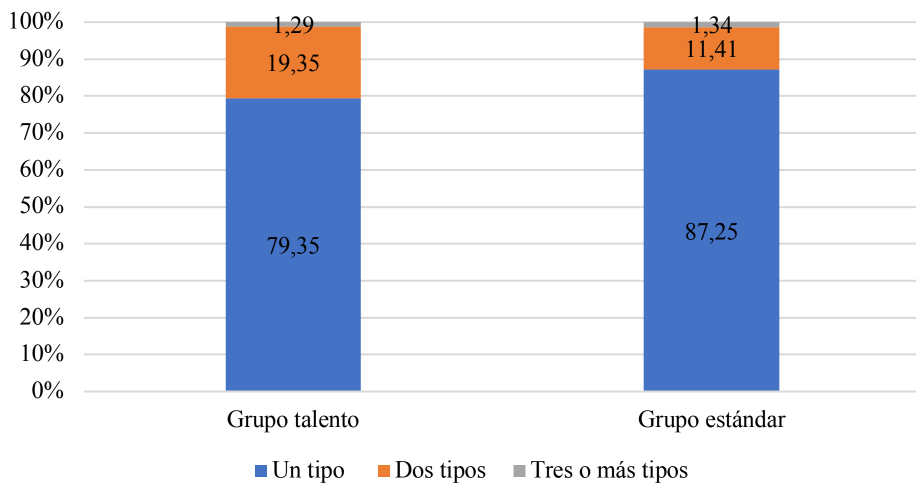
Tipo de número	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Naturales	151	97,42	148	99,33
Notación decimal	9	5,81	6	4,03
Notación fraccionaria	21	13,55	7	4,70
Irracionales	6	3,87	7	4,70
Complejos	1	0,65	0	0,00

Como se puede observar en la tabla anterior, los dos grupos prefirieron emplear números naturales, ya que el 97,42% de los enunciados planteados por el grupo talento y el 99,33% de los inventados por el grupo estándar presentan esta característica. Además, resultó que el grupo talento empleó una proporción mayor de problemas que incluyen números racionales (19,33%) que el grupo estándar (9,4%).

También resultó que a pesar de que en la T2-C1 se presenta una lista de diferentes tipos de números que los estudiantes podían escoger para inventar problemas, ellos decidieron emplear números naturales. Esto refuerza la tendencia por parte de ambos grupos de preferir los números naturales en el proceso de invención de problemas. De hecho, la mayor cantidad de problemas con números racionales fueron planteados con base en la T3-C2.

En cuanto a la cantidad de diferentes tipos de números, el gráfico 7 muestra que ambos grupos emplearon en la mayoría de sus problemas un solo tipo de número, ya que el 79,35% y 87,25% de los problemas planteados por el grupo talento y estándar, respectivamente, presentan esta característica. También se observa que el grupo talento planteó una proporción mayor de enunciados que contenían dos tipos de números que sus compañeros del grupo estándar. Al realizar el análisis estadístico se encontraron diferencias significativas de la cantidad de tipos de número por grupo (Chi-cuadrado=3,802 gl=1, p<0,05).

Gráfico 7. Cantidad de tipos de número por grupo



Los resultados obtenidos con respecto al tipo de cuestionario se presentan en la siguente tabla.

Tabla 4.6

Tipo de número empleado según el cuestionario

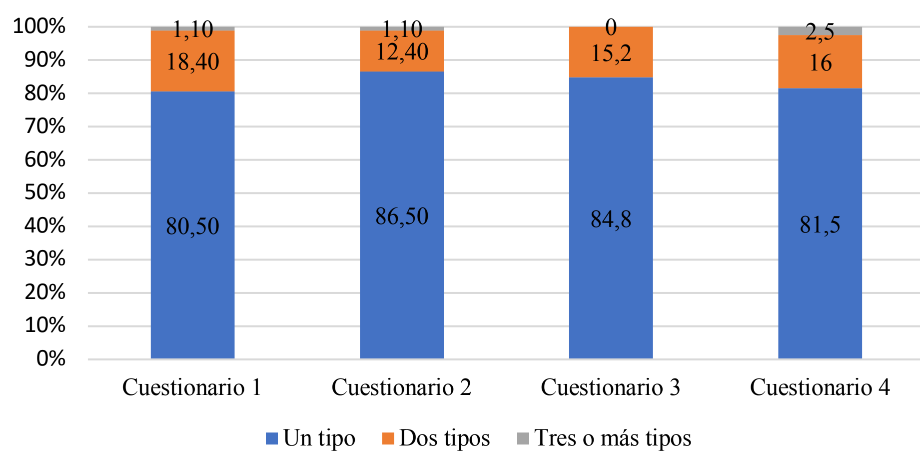
Tipo de número	Cuestionario							
	C1	%	C2	%	C3	%	C4	%
Naturales	85	97,70	88	98,88	46	100,00	80	98,77
Notación decimal	4	4,60	5	5,62	2	4,35	4	4,94
Notación fraccionaria	1	1,15	5	5,62	5	10,87	7	8,64
Irracionales	5	5,75	0	0,00	0	0,00	8	9,88
Complejos	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	1,23

De acuerdo con la tabla 4.6, el uso de número naturales y en notación decimal se distribuye de forma similar entre los cuestionarios. En relación con los números en notación fraccionaría y complejos, resultó que en el C4 fue donde se planteó la mayor cantidad de enunciados con estos tipos de números.

De igual forma se estudio la cantidad de tipos según el cuestionario y se encontró que en todos ellos los estudiantes prefirieron emplear un solo tipo de número. El análisis estadístico realizado concluye que no existen diferencias significativas de esta variable según el tipo de cuestionario (Chi-cuadrado=1,29, gl=3, p<0,730).

Los resultados de acuerdo con esta variable se presentan en el siguiente gráfico.

Gráfico 8. Cantidad de tipos de número según cuestionario



Tipo de pregunta

En esta variable se estudió el tipo de pregunta que incluyó el estudiante en el enunciado del problema y que se puede clasificar como de asignación, relacional o condicional. A continuación se presentan los resultados con respecto a esta variable.

Tabla 4.7

Tipo de pregunta

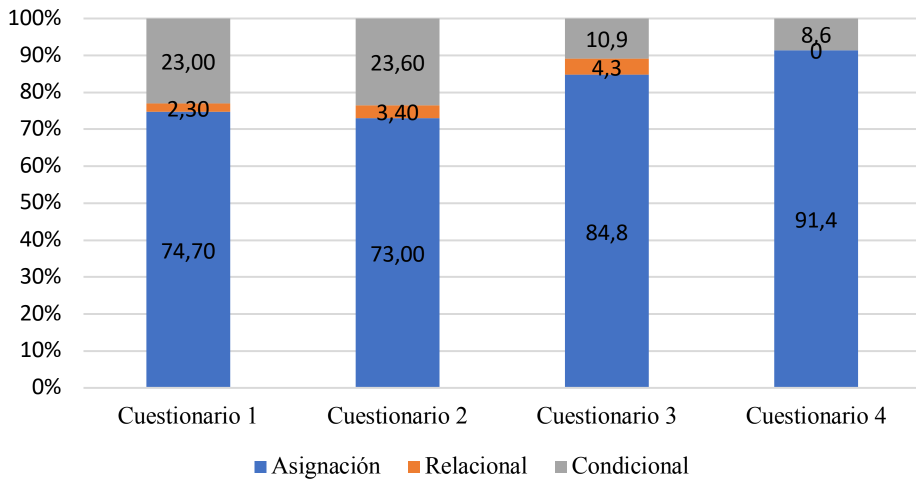
Tipo de pregunta	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Asignación	119	76,77	126	84,56
Relacional	2	1,29	4	2,68
Condicional	34	21,94	19	12,75
Total	155	100	149	100

Como se puede observar en la tabla 4.7, la mayoría de las proposiciones interrogativas que incluyeron los estudiantes del grupo talento y estándar son de asignación (76,77% y 84,56% respectivamente). En este tipo de proposiciones se solicita calcular una determinada cantidad o valor, sin establecer relaciones o condiciones en la pregunta. También se observa que ambos grupos emplearon una cantidad muy pequeña de proposiones interrogativas relacionales.

Un problema que contiene una proposición interrogativa de asignación es el siguiente: "Si ese mismo tren transporta $\frac{1}{8}$ de la mercancía y en cada vagón de pasajeros hay el doble de hombres que de mujeres. ¿Cuántos kilogramos de mercancía lleva el tren y cuántos hombres viajan en ese tren?" (01GE-T1-C1). Un problema con una proposición interrogativa condicional es el siguiente: "Si el tren inició su viaje con una velocidad de $40\frac{km}{h}$ y a las $\frac{3}{8}$ partes del recorrido realizó una parada la cual tardó 10 minutos y luego continuó el resto de su recorrido con el doble de su velocidad anterior, ¿A qué hora llegará a su destino si se sabe que la distancia entre estos 2 lugares es igual al producto de la cantidad de divisores de pasajeros y kilogramos de mercancías?" (07GT-T1-C1).

Los resultados obtenidos con respeto al tipo de cuestionario y esta variable se muestran en el siguiente gráfico.

Gráfico 9. Tipo de pregunta según cuestionario



Como se aprecia en el gráfico anterior, en cada uno de los cuestionarios se incluyeron una gran cantidad de problemas cuya pregunta es de asignación. Sin embargo, en el C1 y C2 se observó también el uso de proposiciones interrogativas condicionales.

Complejidad matemática

La complejidad matemática se refiere a la capacidad que tiene el estudiante de plantear problemas complejos desde el punto de vista matemático. Por tanto, se vincula con elementos que hacen que el problema sea difícil de resolver, como son la cantidad de pasos que requiere para ser resuelto, el empleo de ideas complejas, el nivel de dificultad según PISA y la demanda cognitiva según Stein, et al. (2000). A continuación, se presentan los resultados obtenidos con base en las variables definidas en esta categoría.

3.2.1 Cantidad de pasos para resolver el problema

En esta variable se estudió la cantidad de pasos distintos necesarios para resolver los problemas, de manera que dos pasos son iguales si conllevan el mismo proceso de cálculo (Espinoza, 2011).

Los resultados muestran que el promedio de pasos necesarios para resolver los problemas inventados por el grupo talento (4,23) es mayor que en el grupo estándar (2,32). Al realizar la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye con un nivel de significación de 0,05 que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, al aplicar la prueba Mann-Whitney se verificó con un nivel de significancia de 0,05 que existen diferencias significativas entre las medias de ambos grupos, ya que el p-valor asociado es 0,0.

Esto refuerza el hecho de que la media general de esta variable es 3,29 y que aproximadamente el 90% de los problemas planteados por el grupo estándar requieren menos de dicha cantidad para ser resueltos, mientras que aproximadamente el 30% de los problemas del grupo talento requieren menos de 3,29 pasos para ser resueltos. La siguiente tabla muestra la distribución de los problemas de acuerdo con la cantidad de pasos y grupo al que pertenece el estudiante.

Tabla 4.8

Cantidad de pasos para resolver el problema

Cantidad de pasos	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Un paso	2	1,30	26	17,45
Dos pasos	24	15,58	68	45,64
Tres pasos	32	20,78	41	27,52
Cuatro pasos	29	18,83	11	7,38
Cinco o más pasos	67	43,51	3	2,01
Total	154	100,00	149	100,00

La información de la tabla anterior también refleja la diferencia entre la cantidad de pasos para resolver los problemas en ambos grupos, ya que la cantidad de éstos que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos es mayor en el grupo talento (62,34%) que en el grupo estándar (9,39%). Además, el 63,09% de los enunciados planteados por el grupo estándar requieren dos pasos o menos para ser resueltos, en contraste con el grupo talento donde el 16,88% requieren esta cantidad.

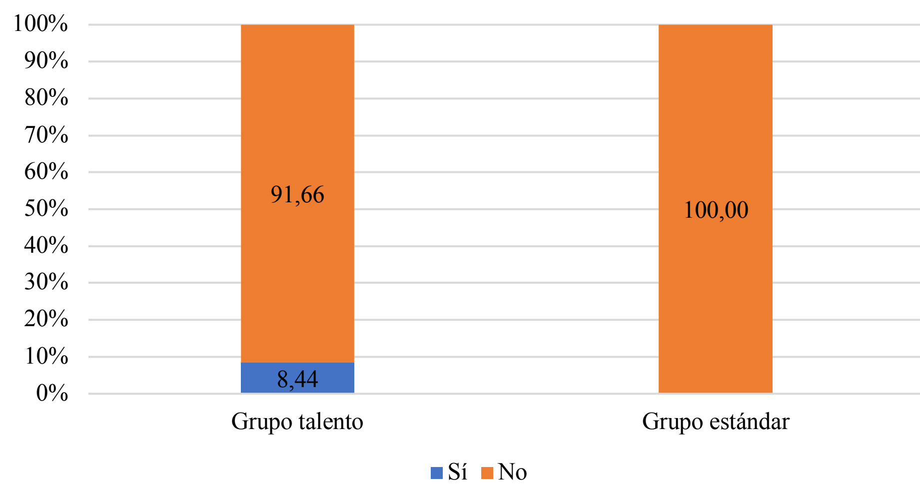
En relación con la cantidad de pasos que requieren los problemas de acuerdo con el tipo de cuestionario, resultó que los planteados en el C4 son los que tienen en promedio una mayor cantidad (3,75), seguido del C3, cuya media es 3,35. Caso contrario ocurrió en el C1 que fue donde se plantearon problemas con una media menor (3,04). Al realizar la prueba de

Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye con un nivel de significancia de 0,05 que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es 0,0. Por tanto, al aplicar la prueba Kruskal-Wallis para muestras independientes, se constata con un nivel de significancia de 0,05 que existen diferencias significativas entre las medias obtenidas en los cuatro cuestionarios, ya que el p-valor asociado es 0,0.

Empleo de ideas complejas

En esta variable se estudió las ideas matemáticas complejas que incluyeron los estudiantes en los problemas que inventaron. Se considera que una idea es compleja cuando es comprendida, generalmente, por estudiantes que están en grados superiores de quien la está empleando. En el siguiente gráfico se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Gráfico 10. Empleo de ideas complejas por grupo



Como se puede observar en el gráfico 10, ambos grupos se caracterizaron por no incluir ideas complejas en sus problemas. Llama la atención que ningún estudiante del grupo estándar incorporó ideas complejas a sus problemas y que solo el 8,44% de los problemas del grupo talento contienen al menos una idea compleja (13 enunciados). Estos problemas están distribuidos en seis estudiantes, donde el estudiante nueve del grupo talento fue quien inventó la mayor cantidad (cuatro enunciados). Con respecto a este resultado, se esperaba que el grupo talento incorporara con mayor frecuencia este tipo de ideas en sus enunciados, ya que según Reyes-Santander & Karg (2009) una de las particularidades que presenta este tipo de estudiantes es la de comprender en profundidad ideas complejas.

El siguiente es un ejemplo de problema que incluye al menos una idea compleja.

"Si tres chicos corren alrededor de un círculo de 80m. Si la aceleración angular es de 5rad/s^2. ¿Cuál es la distancia x recorrida de ventaja que tiene el primer corredor sobre los demás y el segundo sobre la muchacha tomando en cuenta que su velocidad angular es igual a 10 rad/s" (08GT-T1-C2).

Por otra parte, en el C4 fue donde se plantearon más problemas con ideas complejas (53,85%), seguido del C1 (23,07%).

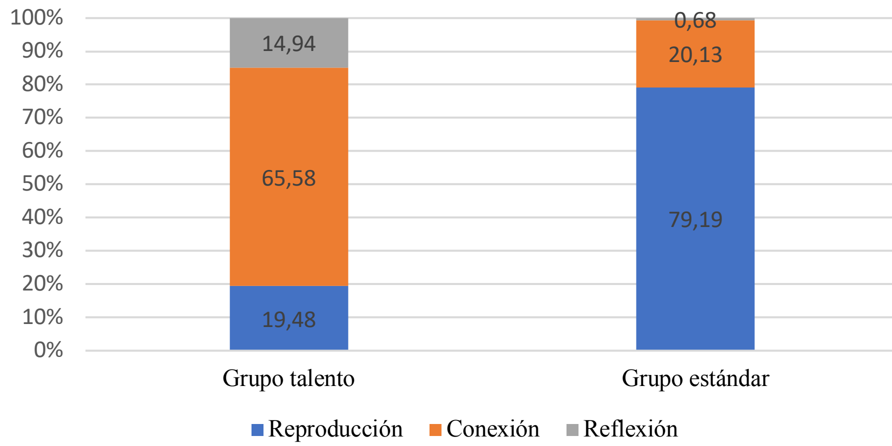
Nivel de complejidad según PISA

En esta variable se analizó el nivel de complejidad de un problema matemático definido en PISA, que se relaciona con el nivel cognitivo que exige el enunciado al resolutor del problema y que implica un mayor nivel de desarrollo de su competencia matemática. Dichos niveles son progresivos en complejidad y corresponden a reproducción, conexión y reflexión.

Los resultados muestran que la mayoría de los problemas planteados por el grupo talento son de conexión (65,58%) e implican varias ideas o conceptos matemáticos; así como varios pasos para ser resueltos; mientras que el grupo estándar planteó una gran cantidad de problemas de reproducción (79,19%) que requieren, en su mayoría, de un procedimiento para ser resueltos. Además, ambos grupos plantearon pocos problemas de reflexión; sin embargo, el grupo talento planteó una mayor cantidad de éstos. Al realizar el análisis estadístico se encontraron diferencias significativas del nivel de complejidad según PISA por grupos (Chi-cuadrado=105,91, gl=2, p<0,00).

Los resultados con respecto a esta variable se presentan en el gráfico 11.

Gráfico 11. Complejidad del problema según PISA.
Porcentaje por grupo

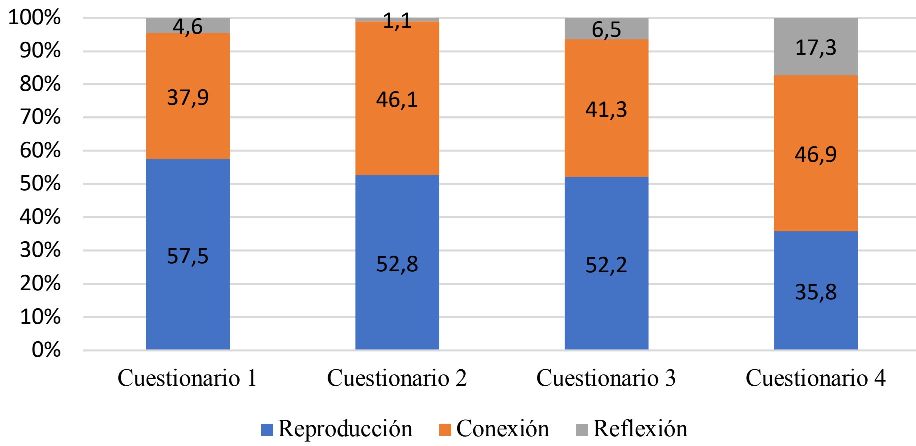


El siguiente es un problema inventado por un estudiante del grupo estándar y que se clasifica como de reproducción: "María decidió ir al supermercado para comprar productos en rebaja. En su lista está: mayonesa, salsa de tomate, jugo de naranja, cereal Corn Flakes, leche con avena, aceite y frijoles molidos. Si compra una unidad de cada producto de su lista, cuánto dinero se ahorra María?" (01GE-T4-C2).

Un problema de conexión inventado por un estudiante del grupo talento es el siguiente: "Tres niños deciden competir en una carrera de velocidad donde el ganador será quien dé primero 2 vueltas a una zona circular (iniciar desde la línea de meta). Suponiendo que al iniciar la segunda vuelta, la niña que llevaba una ventaja de 20 m y llevaba una velocidad de 4 $\frac{m}{s}$ se tropieza y permanece en el suelo por 6 segundos antes de ponerse de pie y continuar con la velocidad que llevaba antes del accidente. El niño que venía detrás de ella gana la carrera. A partir de la línea de meta (inicio de la segunda vuelta). ¿A qué velocidad mínima tuvo que correr el varón para ganarle a la niña?" (05GT-T1-C2).

Con respecto al tipo de cuestionario y esta variable, el gráfico 12 muestra que en los C1, C2 y C3 predominó el planteamiento de problemas de reproducción; mientras que en el C4 se plantearon menos de este tipo, pero más de conexión y reflexión. De igual forma, en el C2 y C3 se plantearon problemas de conexión. El análisis estadístico reveló que existen diferencias significativas entre la complejidad según PISA y el tipo de cuestionario (Chi-cuadrado = 22,18, gl=6, p<0,01).

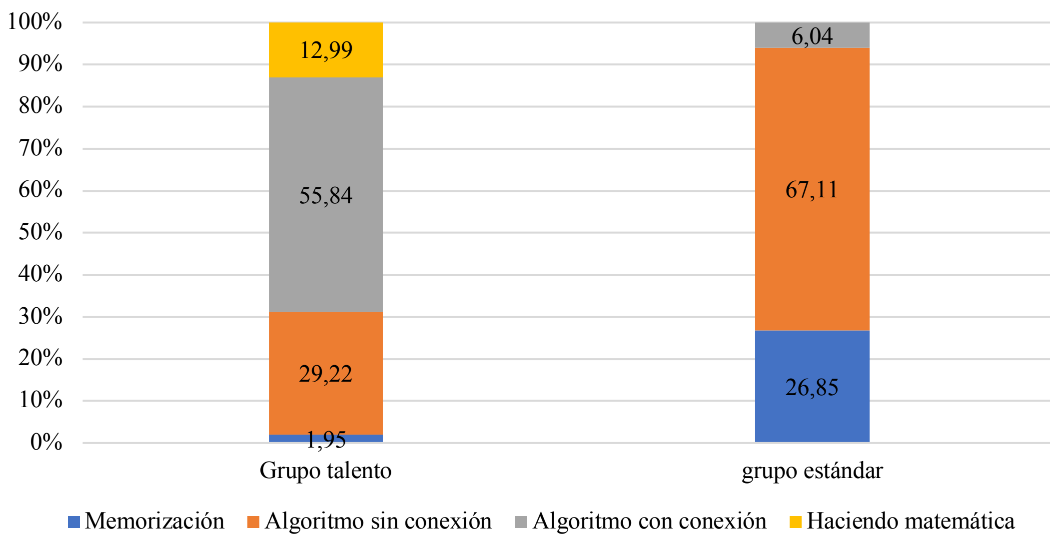
Gráfico 12. Complejidad según PISA. Porcentaje por cuestionario



Demanda cognitiva

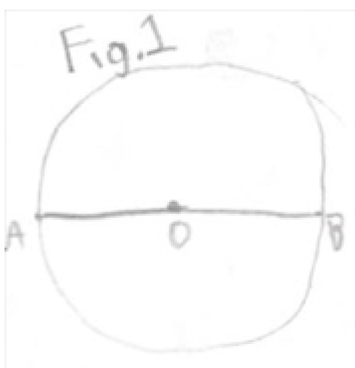
En esta variable se analizó la clase o nivel de pensamiento que la tarea le exige a los estudiantes para implicarse y resolverla con éxito. Stein et al. (2000) contemplan las siguientes cuatro categorías de demanda cognitiva cuyos niveles son progresivos en complejidad y excluyentes entre sí: memorización, algoritmo sin conexión, algoritmo con conexiones y hacer matemáticas. El gráfico 13 muestra los resultados obtenidos de acuerdo con esta variable.

Gráfico 13. Demanda cognitiva. Porcentaje por grupo



De acuerdo con el gráfico anterior, los estudiantes del grupo talento planteron problemas con una demanda cognitiva alta, que implican la conexión de diferentes conceptos matemáticos y un esfuerzo cognitivo importante, ya que sus enunciados se clasifican como de algoritmo con conexión (55,84%) o haciendo matemática (12,99%). En el caso del grupo estándar, una cantidad siginificativa de sus problemas son de baja demanda cognitiva (93,96%), pues son de memorización o algoritmo sin conexión. Estos problemas generalmente requieren de un procedimiento para ser resueltos y es fácil determinar un procedimiento para su solución. Al realizar el análisis estadístico se encontraron diferencias significativas de la demanda cognitiva por grupos (Chi-cuadrado=135, 06, gl=3, p<0,00).

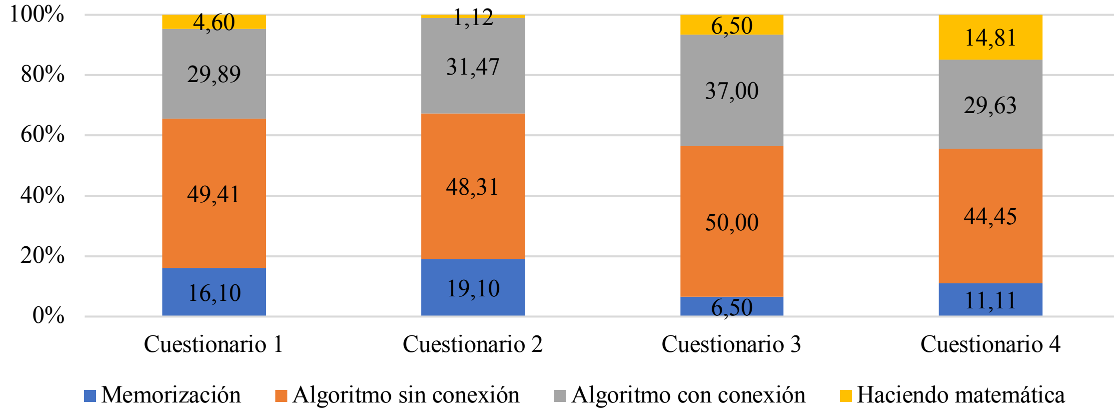
Un problema cuya demanda cognitiva es de algoritmo con conexión, pues requiere de un esfuerzo cognitivo y de varios procedimientos para su solución, así como conectar diferentes conceptos matemáticos es el siguiente: “Si tengo un prisma hexagonal cuyo volumen es $\frac{7}{5}\pi$ del volumen de la esfera de la figura 1. AB es tres unidades mayor que el radio del hexágono cuyo perímetro es es equivalente a fog con $f(x) = 3x$ y $g(x) = x + 3$ y x es igual al valor en grados de $\frac{\pi}{4}$. ¿Cuál es el prisma hexagonal?” (02GT-T1-C4).



El siguiente es un ejemplo de problema clasificado como de algoritmo sin conexión, pues requiere de un procedimiento que es fácil de observar: “Si en el transcurso de Cartago a Alajuela hay una parada para añadir vagones y añaden tres vagones para pasajeros, pero esta vez los vagones son más grandes y por cada vagón caben 177 personas y todos los vagones van llenos. ¿Cuántas personas van en total?” (20GE-T1-C1).

En el siguiente gráfico se muestran los resultados obtenidos de acuerdo con la demanda cognitiva de los problemas según el tipo de cuestionario.

Gráfico 14. Demanda cognitiva. Porcentaje por cuestionario



Como se observa en el gráfico 14, los diferentes niveles de demanda cognitiva se distribuyeron de forma similar en los cuatro cuestionarios. Sin embargo, se pueden apreciar algunas diferencias. Al respecto, en el C1 y C2 fue donde se plantearon la mayor cantidad de enunciados con baja demanda cognitiva (65,51% y 67,41% respectivamente), ya que corresponden a problemas de memorización y de algoritmo sin conexión. Mientras que en el C3 y C4 fue donde se plantearon más problemas con alta demanda cognitiva (43,5% y 44,44% respectivamente). Al realizar el análisis estadístico con respecto a esta variable, resultó que existen diferencias significativas por tipo de cuestionario (Chi-cuadrado=17,92, gl=9 y $p<0,036$).

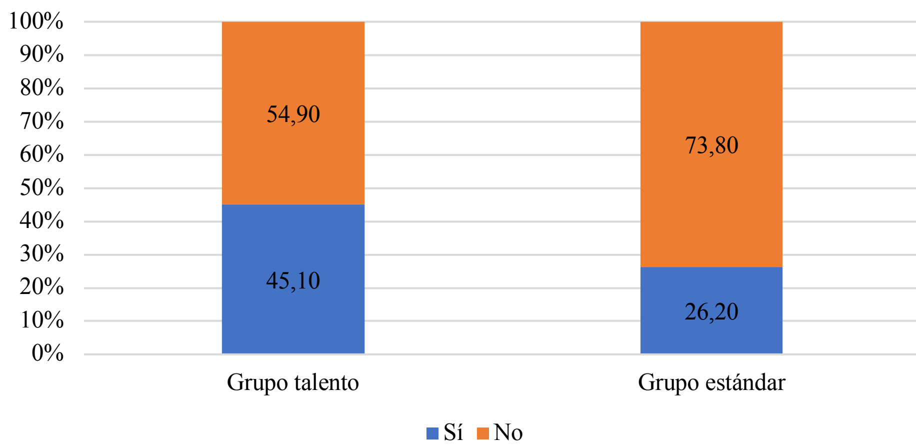
4.4 Análisis según el pensamiento metacognitivo

En esta sección se presenta el análisis del pensamiento metacognitivo evidenciado por los estudiantes durante el proceso de invención de problemas. Esta categoría fue estudiada de acuerdo con el control metacognitivo y los principios de autocorrección. A continuación se presentan los resultados de acuerdo con esta categoría.

1.1 Control metacognitivo

En esta variable se analizaron los cambios realizados al enunciado del problema producto de la verificación, rectificación y revisión del mismo, con el objetivo de inventar problemas con mayor riqueza. Para observar dichos cambios se les pidió a los estudiantes no utilizar el borrador durante la actividad, sino tachar el texto o número que querían cambiar. En el siguiente gráfico se muestra la cantidad de estudiantes que realizaron algún cambio al problema.

Gráfico 15. Porcentaje de estudiantes por grupo que realizaron cambios al problema



Como se observa en el gráfico 15, el 45,10% de los estudiantes del grupo talento realizaron al menos un cambio al enunciado del problema, en contraste con el 26,20% del grupo estándar que lo hicieron. Al realizar el análisis estadístico resultó que existen diferencias significativas entre los grupos, por lo que esta variable y tipo de grupo son dependientes (Chi-cuadrado=11,76, gl=1, p<0,01).

En la siguiente tabla se profundiza más con respecto a los cambios que realizaron los estudiantes al enunciado del problema.

Tabla 4.9

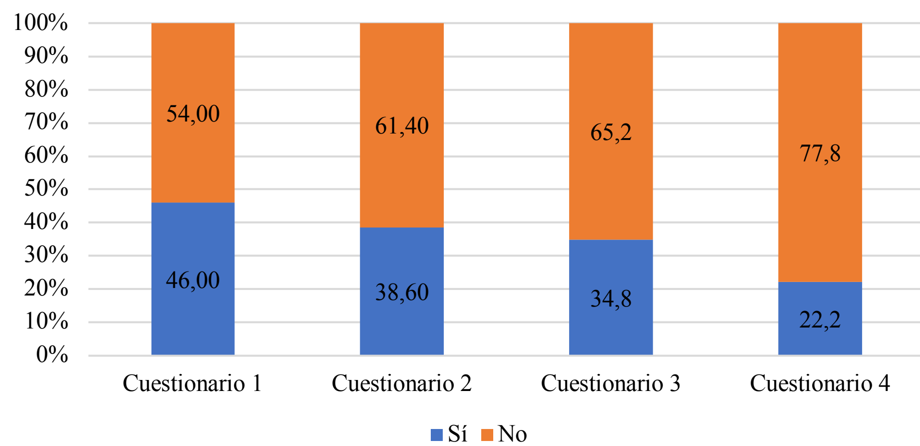
Cambios realizados al enunciado del problema

Cambios realizados	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Redacción del problema	56	36,36	26	17,45
Datos numéricos	31	20,13	20	13,42
Nuevas proposiciones no semejantes	5	3,25	3	2,01
Nuevas proposiciones semejantes	0	0,00	1	0,67
Requerimientos	0	0,00	1	0,67

De acuerdo con la tabla anterior, ambos grupos prefirieron cambiar la redacción del problema o los datos numéricos, ya que esto representa el 56,49% y 30,87% de los cambios realizados por el grupo talento y estándar respectivamente. Llama la atención que ambos grupos prácticamente no agregaron nuevas proposiciones al enunciado, ni realizaron cambios en los requerimientos. Esto porque según la literatura consultada, a los estudiantes con talento les resulta fácil modificar ideas previamente elaboradas, con el fin de establecer control durante la solución de una tarea (Greenes, 1981).

Con respecto al tipo de cuestionario y esta variable, el gráfico 16 evidencia que los estudiantes realizaron la mayor cantidad de cambios al enunciado en el C1 (46%) y C2 (38%). En contraste, realizaron la menor cantidad de cambios en el C4. Finalmente, se hallaron diferencias significativas por cuestionario entre la cantidad de cambios realizados al enunciado del problema (Chi-cuadrado=10,75, gl=3, p<0,013).

Gráfico 16. Porcentaje de estudiantes que realizaron cambios al enunciado por cuestionario



Prinicipios de autocorrección

En esta variable se analizaron las acciones que realizó el estudiante para verificar que el problema inventado es resoluble y que la solución es coherente en el contexto del problema. Los resultados muestran que el 9,7% de los problemas del grupo talento evidencian principios de autocorrección, mientras que el 7,4% de los formulados por el grupo estándar lo son. En la siguiente tabla se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Tabla 4.10

Principios de autocorreción del problema inventado

Variables	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
El problema siempre tiene solución	110	71,43	128	85,91
Realizó cambios para que el problema sea resoluble	3	1,95	2	1,34
Cambió los datos para que el resultado sea coherente	15	9,74	9	6,04

Con respecto al tipo de cuestionario, resultó que en el C1 fue donde se evidenciaron más principios de autocorreción (11,6%), seguido del C2 (10,2%). Al realizar el contraste de hipótesis, no se hallaron diferencias significativas en esta variable (Chi-cuadrado=2,89, gl=3, p<0,408).

4.5 Análisis según el pensamiento divergente

En este apartado se presenta el análisis del pensamiento divergente que mostraron los estudiantes durante el proceso de invención de problemas. Esta categoría se estudió a partir de cinco variables: fluidez de ideas, creatividad, categoría de contenido matemático, campos de conocimiento y conexión entre los hechos. A continuación, se presentan los resultados de acuerdo con esta categoría.

Fluidez de ideas

Esta variable se estudió de acuerdo con la cantidad de proposiciones (Espinoza et al., 2015) no semejantes presentes en el enunciado del problema. Al respecto resultó que el promedio es mayor en el grupo talento (3,64) que en el grupo estándar (2,42). Al realizar la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para deteminar normalidad, se concluye con un nivel de significancia de 0,05 que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, al aplicar la prueba de Mann-Whitney resultó, con un nivel de significancia de 0,05, que existen diferencias significativas entre las medias de ambos grupos, ya que el p-valor asociado es 0,0. En la siguiente tabla se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Tabla 4.11

Cantidad de proposiciones no semejantes

Cantidad de proposiciones	Grupo talento		Grupo estándar	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Una proposición	4	2,60	18	12,08
Dos proposiciones	27	17,53	69	46,31
Tres proposiciones	48	31,17	47	31,54
Cuatro proposiciones	41	26,62	11	7,38
Cinco o más proposiciones	34	22,08	4	2,68
Total	154	100,00	149	100,00

De acuerdo con la tabla 4.11, la mayoría de problemas del grupo estándar contienen dos o menos proposiciones (58,39%); en contraste con el grupo talento donde el 20,13% presentan esta cantidad de proposiciones. Además, la cantidad de problemas que incluyen cuatro o más proposiciones distintas es mayor en el grupo talento que en el grupo estándar (48,7% y 10,06% respectivamente). Por otra parte, se determinó que el 50% de los enunciados del grupo talento contienen tres o más proposiciones, mientras que el 50% de los problemas del grupo estándar contienen dos o menos proposiciones.

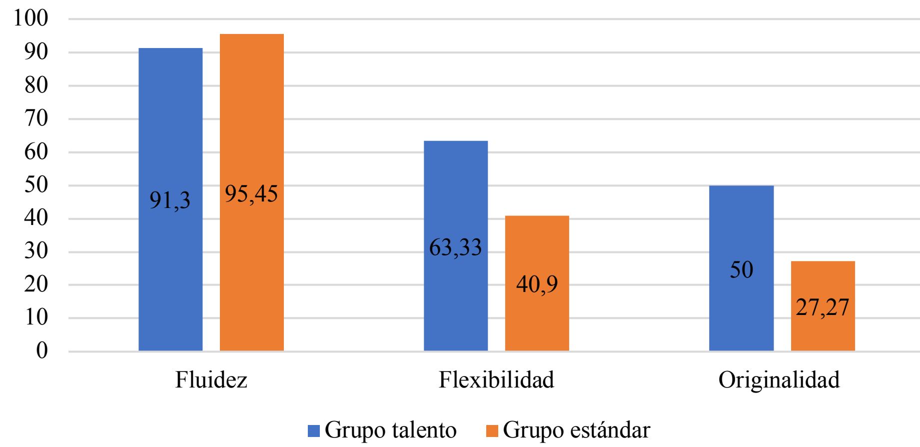
En cuanto a las tareas, en el C1 fue donde se plantearon los problemas con una mayor cantidad de proposiciones no semejantes, ya que en promedio contenían 3,38 por enunciado, seguido del C3 que incluyen 3,15 proposiciones distintas por problema. En contraste, en el C4 los estudiantes plantearon los problemas con menor cantidad de proposiciones no semejantes (2,81). Al realizar la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para deteminar normalidad, se concluye con un nivel de significancia de 0,05 que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto se empleó la prueba de Kruskal-Wallis para muestras independientes y se obtuvo con un nivel de significancia de 0,05 que existen diferencias significativas entre las medias de los cuestionarios, ya que el p-valor asociado es 0,014.

Creatividad

En esta variable se analizó la capacidad creativa de los estudiantes en contextos de invención de problemas a partir de tres criterios: fluidez, flexibilidad y originalidad (Kontorovich et al., 2011). Para ello se les pidió en la T1-C2 que inventaran tres problemas a partir de la imagen de los niños corriendo en una plaza circular.

En este análisis se valoraron 130 problemas de 135 posibles (65 del grupo talento y 65 del grupo estándar). Los resultados con respecto a los tres criterios empleados para valorar la creatividad se presentan en el siguiente gráfico.

Gráfico 17. Creatividad del estudiante según la fluidez, flexibilidad y originalidad. Porcentaje por grupo



De acuerdo con el gráfico 17, un porcentaje alto de estudiantes lograron inventar los tres problemas solicitados (91,3% y 95,45% del grupo talento y estándar respectivamente), por lo que el criterio de fluidez se evidenció en ambos grupos. De hecho, solo dos estudiantes del grupo talento y uno del grupo estándar no lograron hacerlo. En relación con la flexibilidad, que consiste en estudiar la capacidad de inventar tres tipos diferentes de problemas, resultó que las producciones del grupo talento son más flexibles que las del grupo estándar, ya que 63,33% y 40,9% de estudiantes del grupo talento y estándar, respectivamente, lograron inventar tres problemas distintos. Por último, el grupo talento también planteó una mayor cantidad de problemas originales (50%) que sus compañeros del grupo estándar (22,73%). Estos problemas corresponden a enunciados que no son comunes con respecto a los demás.

En relación con los tipos de problemas, se encontró que los estudiantes del grupo estándar plantearon en términos generales cinco tipos de enunciados relacionados con: a) correr alrededor del parque, b) calcular el área o perímetro de la cancha de fútbol, el parque o un elemento de éstos; c) determinar la distancia entre el parque y la cancha de fútbol; d) las palmeras que están en el interior del parque y e) el edificio contiguo a la cancha.

Los problemas del primer tipo piden calcular la velocidad, el tiempo o distancia recorrida por uno o varios de los niños; así como la distancia luego de correr alrededor del parque y la cancha de fútbol. Para ello incluyen información como la velocidad de los corredores, la distancia recorrida o el tiempo que tardan en dar una determinada cantidad de vueltas. De éstos, algunos son del área de Física, ya que se resuelven empleando la fórmula de velocidad. Otros son de Aritmética, pues solicitan calcular los metros recorridos en una determinada cantidad de vueltas o el tiempo, pero en su solución no es necesario emplear la fórmula de velocidad. Este tipo de problemas fue el más común en este grupo, ya que representan el 66,15% del total de producciones analizadas (43 enunciados).

Dos enunciados típicos de este tipo de problemas son los siguientes: "Si cada vuelta que dan tres niños en una plaza son 80 m y en total recorrieron 1200m los tres niños en 10 minutos ¿Con qué rapidez iban los niños?" (14GE-T1-C2). "Si 80m es la distancia por cada vuelta y en promedio cada niño puede correr 5km ¿Cuántas vueltas pueden dar?" (17GE-T1-C2).

Los enunciados del segundo tipo son problemas geométricos que piden calcular el área o perímetro de la cancha, el parque o una fracción de éstos. En este grupo también están los problemas que se relacionan con los elementos incluidos en la cancha, como las líneas o la circunferencia central. En dichos enunciados se incluye información como las dimensiones de la cancha o el radio del parque. También agregaron información sobre la relación entre las dimensiones de la cancha y el radio o perímetro del parque. Para su solución se requiere emplear las fórmulas del área o perímetro de un rectángulo o círculo. Estos problemas representan el 24,62% del total de producciones analizadas en esta tarea (16 problemas).

Los siguientes son dos ejemplos de este tipo de problemas: "¿Cuánta cantidad de pasto se necesita para cubrir la totalidad de la cancha de fútbol si de ancho tiene 75 metros y ¾ de la parte larga mide 112,5 metros?" (06GE-T1-C2). "En el dibujo anterior se ve a un niño corriendo alrededor de un parque con forma circular. La circunferencia del parque es 80m. Averigüe el área ocupada por el parque" (13GE-T1-C2).

En el tercer tipo de problemas se pide calcular la distancia que recorre un niño de un determinado lugar del parque a otro de la cancha. Para ello agregaron información como las dimensiones de la cancha, el radio del parque o de la circunferencia central de la cancha. Para resolverlos se emplearon procesos geométricos como el Teorema de Pitágoras o la distancia entre dos puntos. Este grupo representa sólo el 3,08% de las producciones (dos enunciados).

El siguiente es un ejemplo de problema de este tipo: "Si se sabe que el diámetro de la cancha es de tres metros. ¿Cuántos metros deben recorrer los niños para llegar al centro de la circunferencia de arena a un punto x perpendicular al centro de la circunferencia de la cancha?" (02GE-T1-C2).

Los problemas del cuarto tipo piden calcular el área o perímetro del triángulo formado por las palmeras del parque. Para ello aportan las medidas de los lados o consideran que dicho triángulo es equilátero o isósceles. En su solución se aplican conceptos de Geometría como la fórmula de área y perímetro de un triángulo o el Teorema de Pitágoras. Este tipo de problemas corresponden al 4,61% de los problemas inventados en esta tarea (tres enunciados). El siguiente es un problema de este tipo: "Dentro del parque hay tres palmeras que forma un triángulo equilátero cuyo centro es homólogo al del círculo del parque. Averigüe el área y perímetro del parque" (13GE-T1-C2).

En el quinto tipo, que incluye sólo un enunciado, se pide calcular la cantidad de niños que hay en el interior del edificio si en total son 25. Este problema se resuelve mediante aritmética simple. El enunciado de dicho problema es el siguiente: "Si en el Kínder hay tres niños afuera y en total hay 25. ¿Cuántos niños hay adentro del Kínder?" (11GE-T1-C2).

Por último, dos producciones originales de este grupo son las siguientes: "Los árboles forman un triángulo isósceles, la altura de uno de ellos es 75 cm y la medida de la copa hasta la base del otro árbol es de 115cm. Las otras medidas son 200cm y 80 cm de distancia entre árboles. ¿Cuál es el área de ese triángulo?" (01GE-T1-C2). "¿Cuánta cantidad de pintura se necesita para pintar las líneas de la cancha, considerando que por cada 10 metros se ocupan 10 litros de pintura y que las líneas del círculo y las de las esquinas suman un total de 20 metros?" (06GE-T1-C2).

Con respecto a los tipos de problemas inventados por el grupo talento, resultó que éstos plantearon los mismos primeros cuatro tipos de enunciados que el grupo estándar: a) correr alrededor del parque; b) calcular el área o perímetro de la cancha, el parque o un elemento de éstos; c) determinar la distancia entre el parque y la cancha de fútbol y d) las palmeras que están en el interior del parque. Además, se encontró un quinto tipo de problema que se relaciona con jugar en el patio de la escuela. Aun cuando se encontró que los tipos de problemas son similares en ambos grupos, existen diferencias en los conceptos empleados y en las preguntas incluidas en cada uno de los tipos de problemas.

En el primer tipo también se encontraron dos cateogorías de problemas, los que se relacionan con el área de la Física y los aritméticos. En los primeros, además de pedir calcular la distancia, tiempo o velocidad de un corredor como ocurrió en el grupo estándar, también solicitan calcular la velocidad o aceleración de uno de los niños para alcanzar a otro o para ganar la carrera, la velocidad de uno de los niños con respecto a otro o de acuerdo a un espectador, la velocidad tangencial de los niños, la distancia que recorren hasta que uno de ellos se detenga, el tiempo que tardan en coincidir si salen al mismo tiempo, la aceleración de uno de los corredores para que coincidan nuevamente.

Para ello, agregaron información como la cantidad de radianes o grados que se ha desplazado uno de los niños, la ventaja en distancia o velocidad que lleva uno con respecto a otro, la medida de un arco, etc. Además, incluyeron conceptos como fuerza de empuje, velocidad tangencial, aceleración o desaleración. Un ejemplo típico es el siguiente:

"A, B y C corren alrededor de una plaza circular de 80 m. Ellos empiezan a utilizar patines motorizados, por lo que A logra recorrerla en 20 s, B en 15 s, y C en 22 s. Como ellos quieren ir más rápido, deciden variar la potencia de los tres motores, calcule el tiempo para recorrer la plaza si se conserva el 95% de la potencia total cuando se juntan a la hora de correr" (04GT-T1-C2).

Con respecto a los problemas aritméticos, se solicita determinar la cantidad de metros o vueltas recorridas alrededor del parque o para igualar "x" vueltas a la cancha, los metros que hacen falta para llegar a la meta, la cantidad de calorías que ha perdido uno de los niños o el número de pasos que dieron en una determinada cantidad de vueltas. Para ello establecen relaciones entre las distancias recorridas por los niños y la cantidad de vueltas con la perdida de calorías; así como la cantidad de pasos por metro.

Las producciones del primer tipo corresponden al 70,77% de los enunciados inventados en esta tarea (46 enunciados). De esta forma, los estudiantes de este grupo plantearon una mayor cantidad de problemas de este tipo que el grupo estándar. Además, son más variados, ya que contienen una mayor cantidad de conceptos y tipos de preguntas que los hacen ser diferentes tanto entre grupos como a lo interno del grupo talento.

Los siguientes son dos problemas que pertenecen a este grupo: “Si Juan, Carlos y María están haciendo una carrera que consta de cinco vueltas. Si mientras María completa la primera vuelta, Carlos va por la tercera y Juan por la segunda, Juan va a una velocidad de 15m/s y Carlos va a una velocidad de 20 m/s. ¿A qué velocidad debería ir María para ser la ganadora?” (20GT-T1-C2). “Un científico determinó que los niños tendrán naúseas al haber recorrido 2 km en vueltas. ¿Cuántas vueltas habrán dado?” (15GT-T1-C2).

En relación con el segundo tipo, los problemas solicitan determinar la razón entre las áreas de la cancha y el parque, una área sombreada o la cuerda en el interior de la circunferencia. También piden calcular las dimensiones de la cancha o el parque. En el enunciado incluyen información como las dimensiones de la cancha o el radio del parque; así como la relación entre las dimensiones de ambas figuras. Para su solución se requiere emplear las fórmulas del área o perímetro de un rectángulo o círculo o el Teorema de Pitágoras. Estos problemas representan el 9,23% del total de producciones de este grupo (seis enunciados). El siguiente es un ejemplo de este tipo de problemas: “Si las dimensiones de una cancha son 50X40 metros y la altura del marco es 1/5 parte del lado más grande y el diámetro del círculo del centro es la mitad de la altura del marco, ¿Cuál es la razón entre el área de la cancha y la del círculo?” (21GT-T1-C2).

En el tercer tipo se demanda calcular la distancia que recorre un niño de un determinado lugar del parque a otro de la cancha. En el enunciado se incluye información como las dimensiones de la cancha, el radio del parque. En su solución se emplean procedimientos geométricos como el Teorema de Pitágoras o la distancia entre dos puntos. Estos problemas representan el 6,15% del total de producciones de este grupo (cuatro enunciados). Un ejemplo de este tipo de problema es el siguiente: “Del centro del parque al centro de la cancha hay una distancia de 100m. El radio de la plaza es 25m. ¿Cuánto recorre una persona que camina en línea recta desde el centro de la cancha al punto D de la circunferencia del parque?” (12GT-T1-C2).

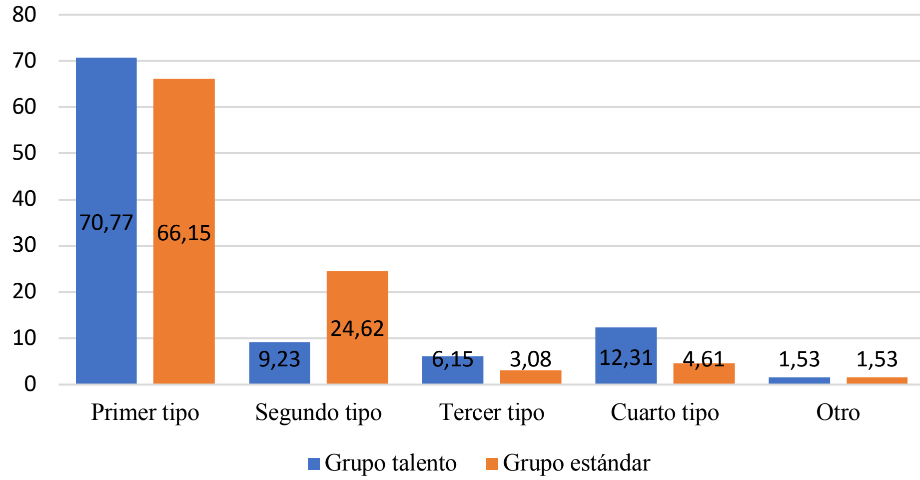
Los problemas del cuarto tipo requieren determinar la cantidad de palmeras necesarias para fabricar 2 km de hilo, determinar el área sombreada entre el triángulo formado por las palmeras y el parque o la velocidad con la que cae un coco o un niño de la palmera. Para ello incluyeron información como la altura de las palmeras, las medidas de los lados del triángulo, la cantidad de cocos y hojas en las palmeras, la cantidad de cocos y hojas necesarias para elaborar un metro de hilo. Los problemas se resuelven empleando conceptos de Geometría como el área de triángulos y círculos o conceptos del área de Física. También se emplean conceptos aritméticos. Estos problemas representan el 12,31% de los enunciados inventados por este grupo ante esta tarea (ocho enunciados). El siguiente es un problema de este tipo: "Si la medida de los lados formados por el triángulo entre las tres palmeras del centro es igual al radio del círculo formado por la pista de carrera, entonces ¿Cuál es la medida del radio del triángulo?" (07GT-T1-C2).

En el quinto tipo que sólo contiene un problema, se pide calcular la rapidez media de un niño al correr en el patio de la escuela en diferentes direcciones y en un tiempo determinado. Para resolverlo se requiere emplear conceptos del área de Física. El problema planteado es el siguiente: "Juan se encuentra jugando en un patio a 70 metros de la escuela en línea recta, si para llegar tuvo que correr 10m al norte, luego 30m al oeste y finalmente corrió al sureste con un ángulo de 30 grados. Si duró 50s en su recorrido. Determine la rapidez media" (11GT-T1-C2).

Por último, los siguientes son tres problemas originales planteados por el grupo talento: "Hay tres niños corriendo en círculo. Se supone que cada vuelta son 80m y por cada metro que se corre se elimina una caloría. Entonces, si cada uno da 10 vueltas al círculo, ¿Cuántas calorías habrán eliminado en total?" (17GT-T1-C2). "Si en una palmera hay 3 cocos y 5 hojas. ¿Cuántas palmeras se necesitan para fabricar 2km de hilo si se requiere 15/17 de hoja y 1/3 de coco para un metro?" (23GT-T1-C2). "Si tres chicos corren alrededor de un círculo de 80m. Si la aceleración angular es de 5rad/s^2. ¿Cuál es la distancia x recorrida de ventaja que tiene el primer corredor sobre los demás y el segundo sobre la muchacha tomando en cuenta que su velocidad angular es igual a 10 rad/s?" (08GT-T1-C2).

En el siguiente gráfico se muestra la distribución de los problemas de acuerdo con el tipo de problema planteado y grupo al que pertenece.

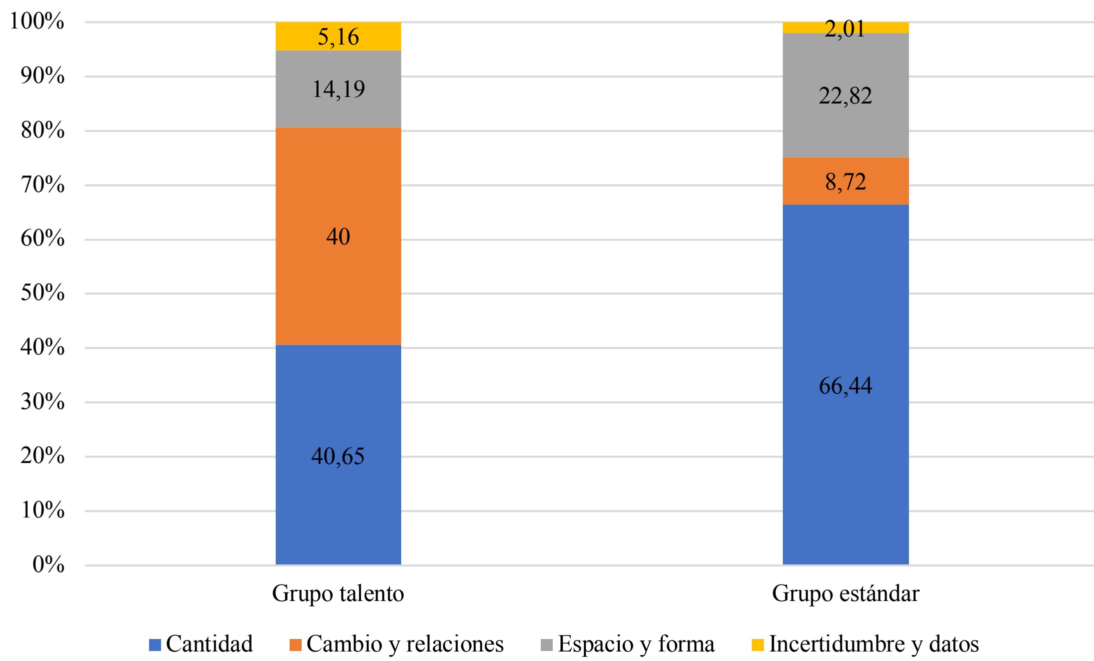
Gráfico 18. Tipos de problemas por grupo



Categoría de contenido matemático

En esta variable se analizó las categorías de contenido matemático incluidas en PISA (2012), las cuales describen la diversidad de problemas en toda el área de la Matemática. Las categorías son: cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad e incertidumbre y datos. En el siguiente gráfico se presentan los resultados con respecto a esta variable.

Gráfico 19. Categoría de contenido matemático por grupo

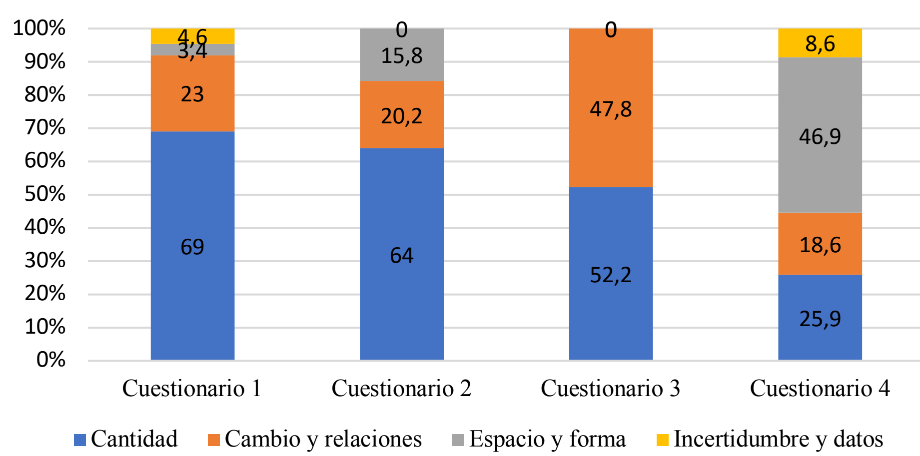


Como se aprecia en el gráfico anterior, los problemas planteados por el grupo talento se concentraron, en términos generales, en dos tipos de categoría de contenido matemático, cantidad y cambio y relaciones (40% aproximadamente en cada una de las categorías); mientras que los del grupo estándar se centraron en la categoría de cantidad (66,44%), seguido de los problemas de espacio y forma (22,82%). Llama la atención que los estudiantes inventaron pocos problemas relacionados con el área de incertidumbre y datos.

Los problemas de cantidad se relacionan generalmente con el área de la Aritmética y los de cambio y relaciones con el cálculo de áreas y perímetros o de elementos en la circunferencia. Al realizar el análisis estadístico, resultó que existen diferencias significativas por grupo y la categoría de contenido matemático (Chi-cuadrado=45,32, gl=3, p<0,00).

Con respecto al tipo de cuestionario, el gráfico 20 muestra que en los C1, C2 y C3 predominaron los problemas cuyo contenido matemático es de cantidad, aunque en el C3 también se plantearon una gran cantidad de enunciados relacionados con cambio y relaciones. Además, se encontró que en el C4 los estudiantes inventaron pocos problemas de cantidad, pero la mayor cantidad de espacio y forma. El análisis estadístico concluye que existen diferencias significativas por cuestionario y la categoría de contenido matemático (Chi-cuadrado=95,93, gl=9, p<0,00).

Gráfico 20. Categoría de contenido matemático por cuestionario

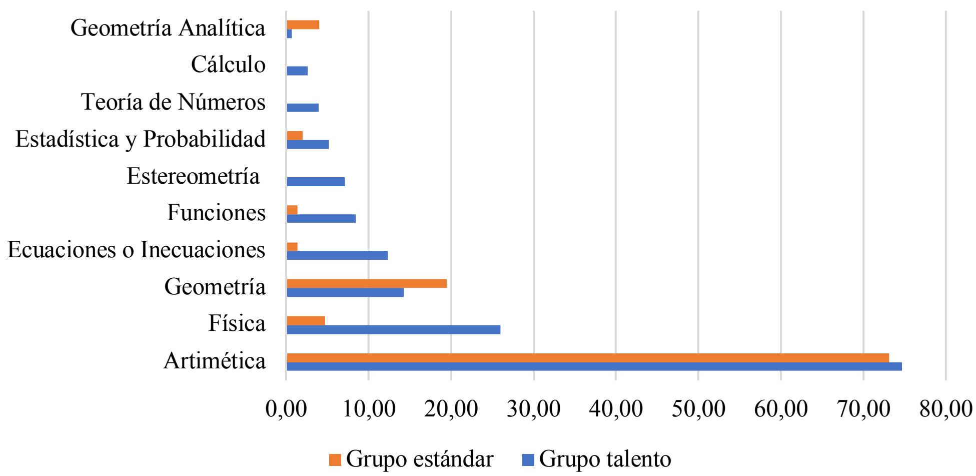


Campos de conocimiento

En esta variable se identificaron el o las áreas del conocimiento matemático implicadas en el problema. Al respecto se lograron identificar los siguientes 10 bloques de contenido curricular: Aritmética, Física, Geometría, Geometría analítica, Estadística y Probabilidad, Estereometría, Teoría de números, Cálculo, Funciones y Ecuaciones.

En el siguiente gráfico se muestra la distribución de los problemas matemáticos de acuerdo con esta variable.

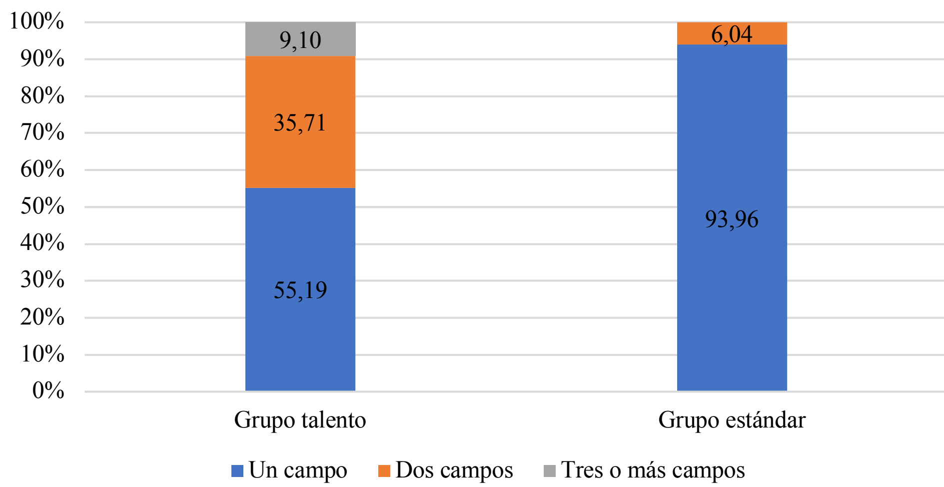
Gráfico 21. Tipo de campos de conocimiento por grupo



De acuerdo con el gráfico 21, los problemas del grupo estándar se concentran en dos campos de conocimiento, Artimética y Geometría (73,15% y 19,47% respectivamente); mientras que la cantidad de producciones en los restantes campos de conocimiento es muy baja. En el caso del grupo talento, sus problemas se concentraron en los bloques de Arimética y Física (74,68% y 25,97% respectivamente), pero también inventaron enunciados en los demás campos de conocimiento, mostrando más variedad en el uso de los campos de conocimiento que conocen. Cabe mencionar que un problema podría estar implicado en más de una bloque de contenido curricular.

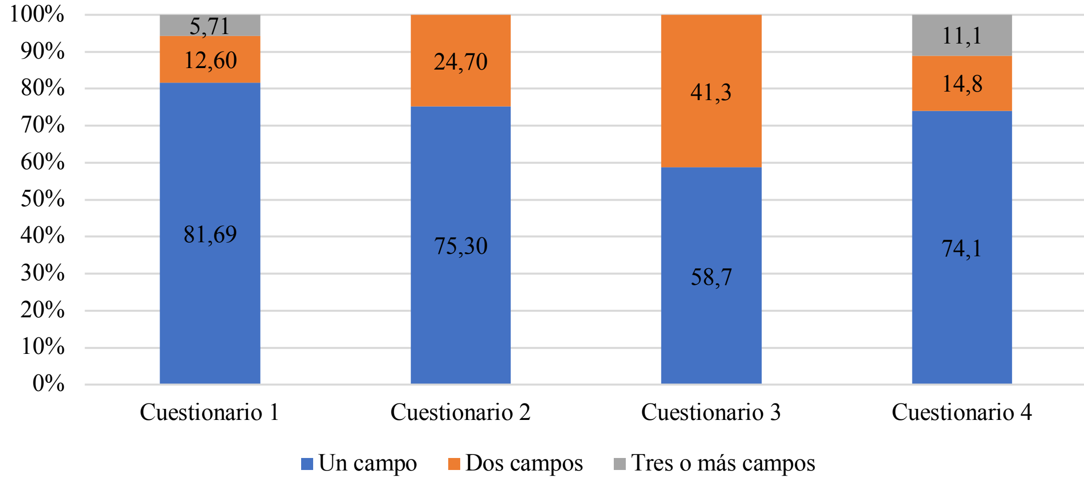
En relación con la cantidad de campos de conocimiento, el gráfico 22 muestra que ambos grupos incluyeron en la mayoría de sus problemas un solo campo de conocimiento, aunque el grupo estándar lo hizo en una mayor proporción que el grupo talento. De hecho, el grupo estándar planteó casi la totalidad de sus problemas con un solo campo de conocimiento, el cual corresponde al bloque de Aritmética. En el grupo talento, resultó que el 35,71% de sus enunicados incluían dos campos de conocimiento. Finalmente, el análisis estadístico reveló diferencias significativas por grupo y la cantidad de campos de conocimiento (Chi-cuadrado=60,41, gl=2, p<0,00).

Gráfico 22. Cantidad de campos de conocimiento por grupo



También se analizó la cantidad de campos de conocimientos incluidos en los problemas según el tipo de cuestionario. Al respecto, resultó que en todos predominó el empleo de un sólo campo de conocimiento. Sin embargo, fue en el C3 donde se planteó la mayor cantidad de problemas con dos campos de conocimiento. Esto pudo ocurrir porque en este cuestionario se les pidió a los estudiantes reformular un problema relacionado con la cantidad de kilómetros que condujeron unos amigos hacia la playa, lo que provocó que inventaran problemas de Aritmética, Física o ambos; mientras que en los demás cuestionarios se encontraron sólo problemas aritméticos. En el siguiente gráfico se muestran estos resultados.

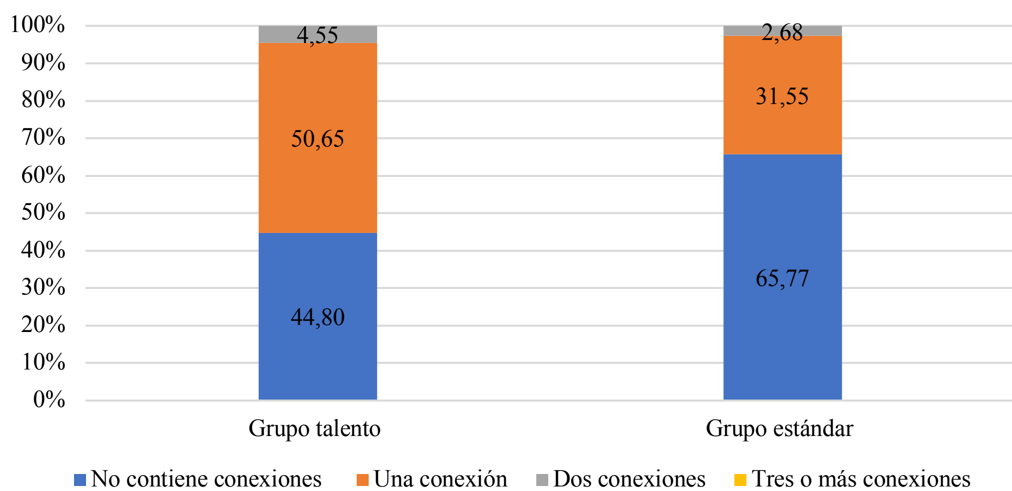
Gráfico23. Cantidad de campos de conocimiento por cuestionario



Conexión entre los hechos

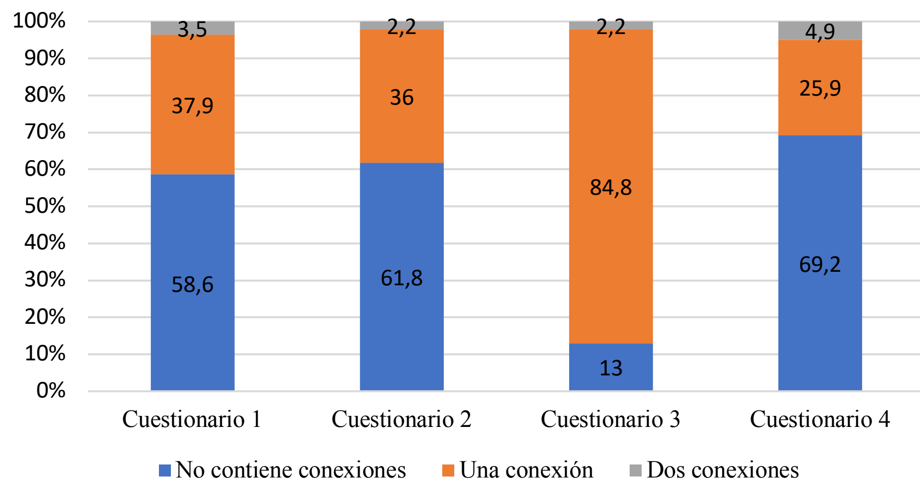
En esta variable se analizó la cantidad de relaciones entre los hechos incluidos en el enunciado del problema. Como se puede observar en el gráfico 24, la mayoría de los enunciados del grupo talento presentan al menos una conexión entre los hechos, ya que el 55,2% presenta esta característica. En el caso del grupo estándar, el 65,77% de sus producciones no contienen conexiones entre los hechos. Al realizar el análisis estadístico, se observan diferencias significativas, lo que evidencia que el grupo talento prefiere plantear problemas con al menos una conexión entre los hechos (Chi-cuadrado=12,66, gl=2, p<0,02).

Gráfico 24. Cantidad de conexiones por grupo



En relación con el tipo de cuestionario, resultó que en cada uno predominaron los problemas con ausencia de conexiones, excepto en el C3 donde se encontró una gran cantidad de ellos que incluyeron una conexión entre los hechos. Esto se pudo deber a que en el C3 los estudiantes reformularon un problema que ya contenía relaciones, por lo que en muchos casos contenían las misma relaciones dadas en el problema original. En el siguiente gráfico se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Gráfico 25. Cantidad de conexiones por cuestionario



4.6 Análisis según la riqueza de los problemas planteados

En esta variable se analizó la capacidad que presentaron los estudiantes de inventar problemas de gran riqueza. Para ello se empleó una rúbrica conformada por nueve variables y que fue descrita en la sección de metodología (Capítulo 3). En este trabajo se concibe la riqueza de un problema a partir de las puntuaciones obentidas (9-22), de acuerdo con el nivel de presencia de las siguientes características: el enunciado es extenso, emplea diferentes tipos de números, implica varios pasos para ser resuelto, incluye varios campos de conocimiento, presenta un alto nivel de complejidad según la clasificación de PISA, requiere una alta demanda cognitiva, evidencia control metacognitivo, presenta fluidez de ideas y conexión entre los hechos. La riqueza general que mostró cada estudiante durante la actividad corresponde a una media simple del nivel de riqueza que obtuvo en cada uno los problemas que inventó.

Las siguientes tablas presentan las puntuaciones del nivel de riqueza general de los estudiantes de acuerdo al grupo que pertenecen. Los datos fueron redondeados al entero más próximo y ordenados de forma ascendente.

Tabla 4.12

Media de la riqueza general de los problemas planteados por el grupo talento

Estudiante	06	03	12	17	15	18	09	20	01	14	23	07	11	21	13	05	22	16	10	19	04	08	02
Puntaje	11	12	13	13	13	13	14	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	17	17	17	19

Tabla 4.13

Media de la riqueza general de los problemas planteados por el grupo estándar

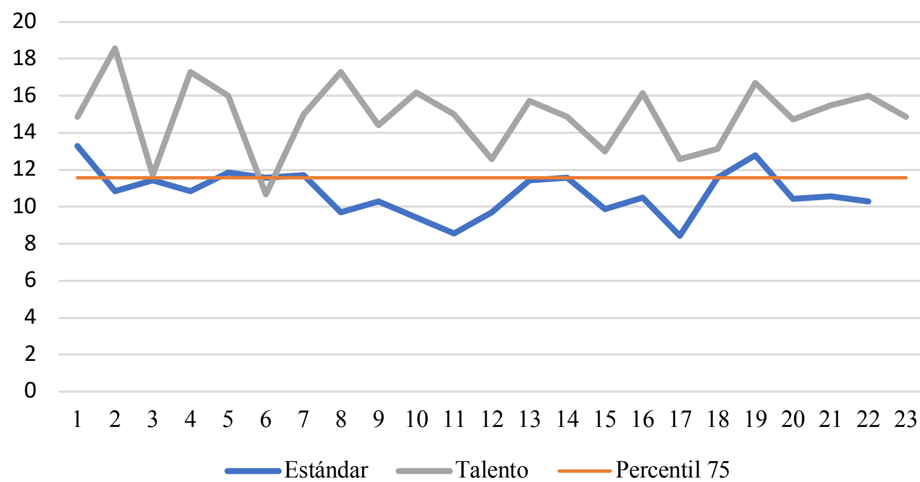
Estudiante	17	11	10	08	12	15	09	22	20	16	21	02	04	03	13	06	14	18	07	05	19	01
Puntaje	8	9	9	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13	13

De acuerdo con las tablas anteriores, las puntuaciones obtenidas por los estudiantes con talento oscilan entre 11 y 19, mientras que las del grupo estándar están entre 8 y 13 puntos. Estas diferencias también se observaron en las medias de la riqueza general en ambos grupos, ya que la media del grupo talento (14,92) es mayor que la del grupo estándar (10,73). Al realizar el contraste de hipótesis mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, mediante el contraste de hipótesis de Mann-Whitney se verificó que existen diferencias significativas entre las medias citadas, ya que el p-valor asociado es 0,0.

También resultó que el 25% de los estudiantes del grupo estándar obtuvieron una puntuación mayor o igual a 11,57. Al ubicar este valor en el grupo talento, resulta que 22 estudiantes (95,65%) obtuvieron una puntuación mayor o igual a ésta. De manera que si consideramos con talento matemático, del mismo modo como lo hizo Benavides (2008), a los estudiantes que obtuvieron una puntuación superior o igual a 11,57, que corresponde a las notas superiores al percentil 75 de la muestra del grupo estándar, entonces el 95,65% de los estudiantes del grupo talento hubiesen sido identificados como tal.

En el siguiente gráfico se muestra la distribución de la riqueza general obtenida por cada uno de los estudiantes de ambos grupos. En él se puede apreciar que sólo el estudiante 6 del grupo talento no hubiera sido identificado como tal.

Gráfico 26. Riqueza general de los problemas

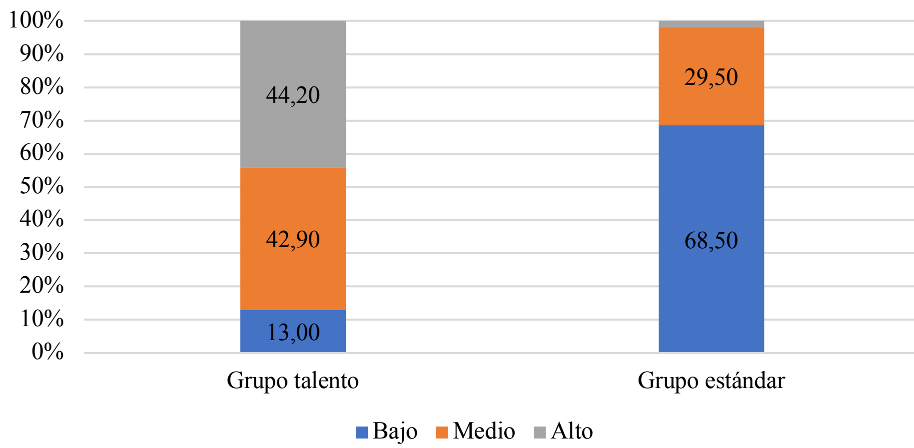


El siguiente es el problema con mayor riqueza planteado por el grupo talento y que corresponde a la produccion de la estudiante dos.

“Si tengo un prisma hexagonal cuyo volumen es $\frac{7}{5}\pi$ del volumen de la esfera de la figura 1. AB es tres unidades mayor que el triple de la apotema de un polígono regular de ángulo central 40° cuyo perímetro es equivalente a fog con $f(x) = 3x + (4x - 3)^2$ y $g(x) = 6x + 2$ y x es igual a considerar los primeros dos dígitos de euler como un número entero. ¿Cuánto mide la apotema de la base de dicho prisma, cuando la altura es tres veces la apotema?” (02GT-T2-C4).

Con respecto al nivel de riqueza general por grupo, el gráfico 27 muestra que los estudiantes del grupo talento se caracterizaron por inventar problemas con un nivel de riqueza medio o alto, ya que el 87,10 % de sus problemas presentan esta característica; mientras que el 68,5% de los problemas del grupo estándar se encuentran en un nivel de riqueza bajo. El análisis estadístico realizado reveló diferencias significativas por grupo y el nivel de riqueza (Chi-cuadrado=118,9 gl=2, p<0,00).

Grafico 27. Nivel de riqueza general de los problemas por grupo



Por último, al estudiar la riqueza de los problemas de acuerdo con el tipo de cuestionario, se encontró que en términos absolutos en el C3 se plantearon problemas con mayor riqueza ya que su media fue de 13,71; mientras que en el C2 se obtuvo la media más baja (12,41). Mediante la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para deteminar normalidad, se dedujo que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto, al realizar el contraste de hipótesis de Mann-Whitney se verificó que la distribución de la riqueza de los problemas es similar entre los cuatro tipos de cuestionario.

4.7 Análisis según la reformulación de problemas con mayor riqueza

En esta variable se analizó la capacidad del estudiante de reformular problemas con mayor riqueza a partir de los enunciados inventados en la T1-C3 y T2-C4. En la primera, se les pidió reformular un problema a partir de uno que primero debían resolver y en la T2-C4 los estudiantes reformularon un problema que ellos mismos inventaron.

Para valorar la riqueza en la reformulación de problemas planteados con base en la T1-C3, se utilizó la rúbrica para estudiar la riqueza de los problemas que fue descrita en la sección 3.4.5 de esta memoria. En el caso de los problemas inventados a partir de la T2-C4, se elaboró una rúbrica que valoró la presencia o ausencia de ocho indicadores que fueron descritos en el apartado 3.4.6 de este documento. Así, la riqueza en la reformulación de problemas se definió como la suma de los indicadores presentes (que podía variar de 0-8) y se clasificó con base en una escala de tres niveles: bajo, medio o alto.

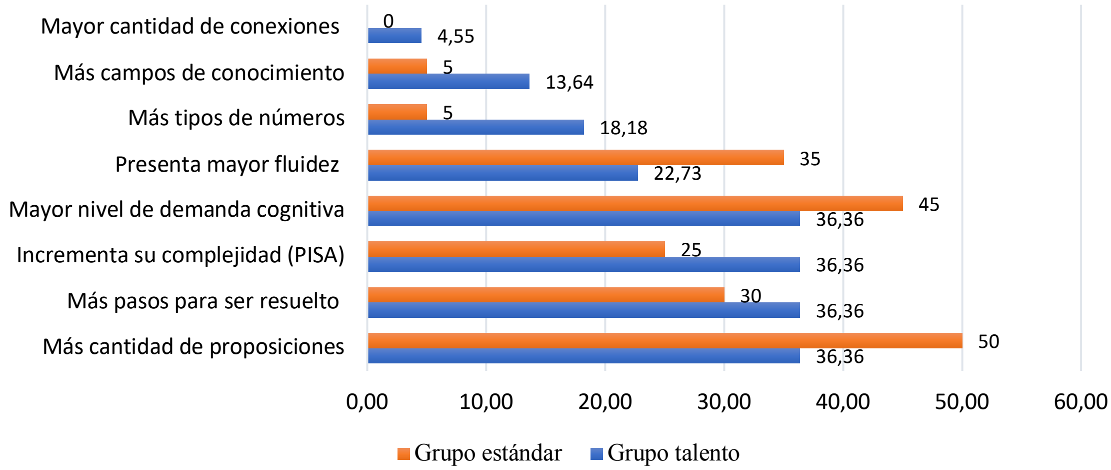
Con respecto a las producciones con base en la T1-C3, resultó que los estudiantes del grupo talento reformularon dicho problema con mayor riqueza que sus compañeros del grupo estándar, ya que la media de la riqueza de los problemas del primer grupo (15,86) es mayor que la del segundo (11,18). Al realizar el análisis estadístico mediante la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para deteminar normalidad, se concluye que los datos no se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,0. Por tanto se realizó la prueba de Mann-Whitney para muestras independientes y se verificó con un nivel de significancia de 0,05 que existen diferencias significativas entre dichas medias, ya que el p-valor asociado es 0,0.

En relación con las producciones analizadas a partir de la T2-C4 resultó que se obtuvieron 42 enunciados, 22 planteados por el grupo talento (de 23 posibles) y 20 por el grupo estándar (de 22 posibles). Además, resultó que el 65,21% y 59,09% de los estudiantes del grupo talento y estándar, respectivamente, mejoraron alguno de los indicadores antes mencionados.

En cuanto a las puntuaciones de la riqueza en la reformulación del problema, se obtuvo que las del grupo talento fueron más variables que las del grupo estándar, ya que las primeras estuvieron en un rango de 0-7 y las del segundo de 0-5. Además, resultó que la media en el grupo talento es ligeramente mayor (2,05) que en el grupo estándar (1,95). Al realizar la prueba de Mann-Whitney para muestras independientes se verificó con un nivel de significancia de 0,05 que la distribución de las puntuaciones de la riqueza en la reformulación de problemas es la misma en ambos grupos, ya que el p-valor asociado es 0,917, por tanto las diferencias no son significativas.

Los resultados obtenidos con respecto a la presencia de los indicadores de cambio se muestran en el siguiente gráfico.

Gráfico 28. Indicadores de cambio presentes según grupo

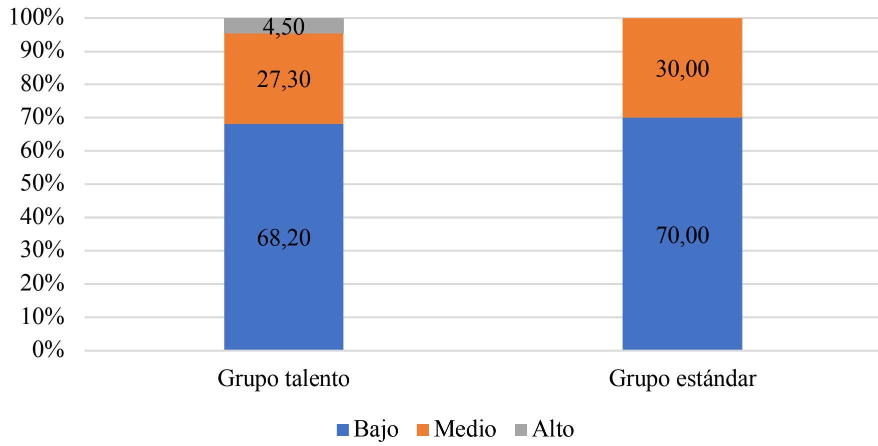


Como se aprecia en el gráfico 28, aproximadamente el 36% de los estudiantes del grupo talento hicieron más ricos los problemas que reformularon al aumentar la cantidad de proposiciones, los pasos para ser resueltos, la complejidad según PISA y el nivel de demanda cognitiva. En el caso del grupo estándar, el 50% agregó más proposiciones al problema y el 45% aumentó el nivel de demanda congnitiva. Además, el 35% de los estudiantes de este grupo formularon problemas con mayor fluidez. Así, ambos grupos reformularon problemas más ricos al mejorar los indicadores de las variables "cantidad de proposiciones", "cantidad de pasos para ser resueltos" y "nivel de demanda cognitiva".

En cuanto a los niveles de riqueza en la reformulación de problemas, resultó que ambos grupos se caracterizaron por reformular problemas en un nivel de riqueza bajo, ya que el 68,2% y 70% de los estudiantes del grupo talento y estándar respectivamente se encuentran en dicha categoría. A pesar de esto, la media de riqueza que presentan los problemas planteados por el grupo talento con base en esta tarea (14,8) es mayor que la del grupo estándar (11,25). Al realizar el análisis estadístico mediante la prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para deteminar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen de forma normal, ya que el p-valor asociado es de 0,1. Por tanto, al contrastar empíricamente empleando la técnica del ANOVA con un nivel de confianza de 0.05 se concluye que las diferencias son significativas, ya que el p-valor asociado es 0,0.

Cabe resaltar que sólo un estudiante del grupo talento se clasificó en un nivel alto de riqueza en la reformulación de problemas. El siguiente gráfico muestra los resultados al respecto.

Gráfico 29. Nivel de riqueza en la reformulación de problemas. Porcentaje por grupo



4.8 Fiabilidad y validez del instrumento

La fiablidad de un instrumento es entendida como la consistencia interna del mismo y se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo sujeto produce resultados iguales (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014). Dicha fiabilidad puede estimarse mediante el alfa de Cronbach, que es un índice de consistencia interna que toma valores entre 0 y 1. Su interpretación indica que cuanto más cerca se encuentre el valor alfa de 1 mayor es la consistencia interna de los ítems analizados.

En el caso de este estudio, se obtuvo un alfa de Cronbach de 0,801, el cual es considerado como un nivel de confiabilidad bueno (George & Mallery, 2003).

Con respecto a la validez del instrumento, se verificó con la ayuda de los directores de esta tesis que las tareas propuestas correspondían a una muestra representativa del universo de diferentes tipos de tareas que se podrían emplear. Para lograr esto se realizó una revisión sobre la clasificación y diseño de tareas de invención de problemas; así como las recomendaciones dadas por algunos autores para su implementación. Luego se eligió una cantidad de tareas que fueron implementadas en un estudio piloto con el objetivo de validar si las situaciones propuestas eran las más adecuadas como reactivos, así como determinar si el tiempo estipulado era suficiente para completarlo.

4.9 Balance general de los resultados

A continuación, se presenta el balance general de los resultados de acuerdo con las variables de estudio definidas en esta investigación. Primeramente, se expone el balance de acuerdo con las variables de estudio y el grupo al que pertenece el estudiante. Luego se muestran los resultados de acuerdo con el tipo de cuestionario y las variables de estudio que fueron más visibles en cada uno de ellos.

En relación con el grupo al que pertenece el estudiante, se encontró que los del grupo talento prefirieron plantear problemas cuyo contenido matemático es de cantidad y cambio y relaciones, centrados en el área de la Aritmética y/o la Física; mientras que sus compañeros del grupo estándar inventaron problemas de cantidad fundamentalmente aritméticos.

También resultó que los problemas del grupo talento son más extensos, presentan mayor fluidez de ideas, incluyen más campos de conocimiento y tipos de números, más conexiones entre los hechos, requieren más pasos para ser resueltos y presentan un mayor nivel de demanda cognitiva y complejidad según PISA. Además, este grupo evidenció mayor control metacogntivo y creatividad durante el proceso de invención de problemas. Así mismo, sus problemas tienen puntuaciones más altas en la riqueza de los problemas según la rúbrica diseñada para tal fin. Es importante destacar que se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las variables citadas y que los estudiantes del grupo estándar no sobresalen, en términos generales, en alguna de las variables de estudio definidas.

Por otra parte, se encontró que ambos grupos plantearon una gran cantidad de problemas resolubles que en términos generales pudieron resolver. Además, los enunciados son coherentes y están inmersos en un contexto extra matemático, vinculados con una situación personal y que incluyen preguntas interrogativas de asignación. También resultó que no emplearon ideas complejas, ni evidenciaron principios de autocorrección. Por último, ambos grupos mostraron un nivel bajo en la reformulación de problemas con mayor riqueza.

Con respecto al tipo de cuestionario, se encontró que en el primero los estudiantes plantearon los problemas más extensos y con una mayor fluidez de ideas. Además, incluyeron más ideas complejas y evidenciaron mayor control metacognitivo y principios de autocorrección. Los problemas planteados en el C2 se destacan por incluir la mayor cantidad de campos de conocimientos y conexión entre los hechos. Así mismo, en este cuestionario los estudiantes evidenciaron mayor control metacognitivo, principios de autocorrección y la inclusión en el enunciado de un contexto necesario para resolverlo, pero en menor medida que en el C1.

En el C3 se plantearon los problemas con la media más alta de riqueza general de los problemas, ya que se observó la presencia, aunque en menor medida que los demás cuestionarios, de variables como longitud del enunciado, cantidad de pasos para resolver el problema, complejidad según PISA, demanda cognitiva y fluidez de ideas. Por último, en el C4, se inventaron los problemas con mayor complejidad matemática, ya que requieren más pasos para ser resueltos, contienen más ideas complejas, presentan la mayor demanda cognitiva y la conexión de diferentes conceptos o ideas matemáticas. Además, se plantearon la mayor cantidad de problemas que contienen un contexto que es necesario para resolverlos.

En relación con la categoría contexto del problema, resultó que en el C4 se plantearon la mayor cantidad de problemas intra matemáticos con un contexto científico, mientras que en los demás se inventaron problemas extra matemáticos, predominando en el C1 el contexto educativo y en el C1 y C2 el contexto personal. Además, en la categoría de contenido matemático, se encontró que los problemas planteados en el C1 y C2 son de cantidad, los del C3 de cambio y relaciones y en el C4 de espacio y forma. En las variables resolubilidad del problema y resolución correcta del problema no se encontraron diferencias entre cuestionarios.

Así, con respecto al tipo de cuestionario resultó que se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las siguientes variables: contexto según PISA, relevancia del contexto, longitud del enunciado, cantidad de pasos para resolver el problema, nivel de complejidad según PISA, demanda cognitiva, control metacognitivo, fluidez de ideas y categoría de contenido matemático.

Por último, resultó que el instrumento de invención de problemas propuesto tiene un nivel de fiabilidad bueno, ya que la prueba arrojó un alfa de Cronbach de 0,801. Además, se realizaron algunas acciones que permitieron verificar que el mismo recogía la información que pretendía.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Como queda de manifiesto en el capítulo 1 de esta memoria de tesis, en esta investigación se indaga sobre dos aspectos que son de relevancia en el estudio de sujetos con talento matemático: la caracterización e identificación. Así, se buscó identificar las características particulares que presentan un grupo de estudiantes con talento matemático cuando resuelven tareas de invención de problemas y estudiar los elementos que aportan este tipo de actividades al proceso de identificación del talento matemático. Para ello, definimos un objetivo general que se concretó en cuatro objetivos específicos que son guiados por cinco preguntas de investigación.

Por tanto, en este capítulo se presentan las conclusiones de nuestra investigación a partir de las cinco interrogantes relacionadas con los objetivos de investigación propuestos. En las primeras dos se abordan las características que mostraron los estudiantes con talento matemático ante los cuatro cuestionarios de invención de problemas propuestos en el estudio, así como las diferencias encontradas con respecto a los enunciados planteados por un grupo de estudiantes de un colegio público estándar.

En la tercera pregunta se trata de responder a las diferencias encontradas en los problemas planteados en cada uno de los cuestionarios de invención de problemas, de manera que se describe en cuál de ellos se formularon problemas con mayor riqueza. Además, se mencionan algunos factores que consideramos influyeron en que algunos de ellos se plantearan problemas ricos.

La cuarta pregunta aborda las diferencias encontradas en cuanto a la riqueza de los problemas de ambos grupos de acuerdo con los criterios y niveles de actuación definidos en la rúbrica diseñada en este estudio. Por último, en la quinta pregunta se responde al uso de las actividades de invención de problemas para identificar estudiantes con talento en matemáticas.

Así, organizamos este capítulo en los siguientes tres apartados: respuesta a las preguntas de investigación, las limitaciones del estudio, líneas abiertas de investigación y una reflexión sobre consecuencias docentes.

5.1. Respuestas a las preguntas de investigación

Pregunta 1. ¿Qué características presentan los problemas inventados por un grupo de estudiantes considerados con talento matemático cuando se les propone este tipo de tareas?

Luego de analizar las producciones de los estudiantes con base en las categorías de análisis definidas, podemos concluir que un estudiante con talento se caracteriza por:

a) Inventar una gran cantidad de problemas resolubles
b) Resolver correctamente los problemas que inventan
c) Plantear enunciados cuyo contexto está vinculado a una situación relacionada con la vida real, cercana al estudiante y que no es necesario para resolver el problema
d) Incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones
e) Emplear números naturales y en menor proporción números racionales
f) Emplear un solo tipo de número
g) Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación
h) Inventar problemas que requieren al menos cuatro pasos para ser resueltos
i) No emplear ideas complejas en sus problemas
j) Plantear problemas cuya complejidad es de conexión
k) Inventar problemas con una alta demanda cognitiva que implican la conexión de diferentes conceptos matemáticos
l) Realizar, durante el proceso de invención de problemas, cambios a la redacción y datos numéricos del enunciado
m) Incluir en los enunciados al menos tres proposiciones no semejantes
n) Inventar problemas creativos, que presentan fluidez, flexibilidad y originalidad
o) Plantear problemas cuyo contenido matemático es de cantidad y cambio y relaciones
p) Combinar los bloques de contenido curricular de Aritmética y Física
q) Realizar al menos una conexión entre los hechos del problema
r) Plantear problemas con un nivel de riqueza medio o alto
s) Reformular problemas con un nivel bajo

Algunas de estas características coinciden con investigaciones previas realizadas sobre el tema. Al respecto en el estudio de Espinoza (2011) también se concluye que los estudiantes con talento emplean números naturales y en menor proporción números racionales, combinan los bloques de Aritmética y Física. Además, sus producciones contienen cinco o más proposiciones y requieren cuatro o más pasos para ser resueltos. Esta conclusión llama la atención porque en dicho estudio se aplicó un cuestionario que contenía dos tareas semiestructuradas centradas en la invención de problemas aritméticos; en contraste con este estudio donde se aplicaron cuatro cuestionarios que incluyen 7 tareas organizadas en situaciones estructuradas, semiestructuradas y libres de invención de problemas; así como tareas de reformulación de problemas. Además, la actividad planteada en esta investigación no se centraba en la invención de problemas aritméticos.

Los siguientes son cinco producciones del grupo talento que muestran las características antes citadas.

“Un tren inicia con ningún pasajero (solo el chofer). Si de una parada a otra se dura 25 minutos y se suben x cantidad de personas igual a la cantidad que se subió en la parada anterior, más la cantidad de personas correspondientes al valor de la parada actual. En la primera subió una persona, en la segunda tres y en la tercera 6, por tanto en la cuarta 10. Al cabo de cuántas paradas existe para que el bus quede completo o no pueda subir a nadie más por la razón de crecimiento” (4GT-T1-C1).

“Lucy quería comprarse una blusa y una chaqueta en la tienda, pero no sabía si le iba a alcanzar ya que solo tenía 14600. Si la chaqueta costaba una cantidad específica y la blusa costaba el triple de esa cantidad y además quería comprar un regalo a su hermano seis partes de lo que cuesta la blusa y chaqueta juntas y le sobraron ¢5. Cuánto cuesta la chaqueta y los demás artículos” (19GT-T2-C1).

“Un banderín se encuentra atado a una varilla. La varilla se encuentra anclada a una pirámide de base triangular de volumen $48\sqrt{3}\,m^3$. Si la varilla mide el doble de la altura de la pirámide, ¿Cuál es el perímetro del banderín?” (19GT-T2-C4).

“Arturo condujo 8/5 de lo que Pedro condujo, Pedro condujo ¾ de lo que Juan condujo, Juan condujo 70km. Si Juan condujo a 65km/h, Pedro a una velocidad relativa respecto a Arturo de -1km/h y Arturo condujo a 4/3 de lo que condujo Juan. Si salieron a las 9:15am y pasaron a desayunar por 0,55h, además se atrasaron en el tráfico por lo que debieron esperar una hora más, ¿A qué hora llegaron?” (2GT-T1-C3).

“Tres niños deciden competir en una carrera de velocidad, donde el ganador será quien dé primero dos vueltas a una zona circular (iniciando desde la línea de meta). Suponiendo que al iniciar la segunda vuelta, la niña que llevaba una ventaja de 20m y llevaba una velocidad de 4m/s se tropieza y permanece en el suelo por 6s y antes de ponerse de pie y continuar con la velocidad que llevaba antes del accidente. El niño que venía detrás de ella gana la carrera. A partir de la línea de meta (inicio de la segunda vuelta). ¿Qué velocidad mínima tuvo que correr el varón para ganarle a la niña?” (5GT-T1-C2).

Pregunta 2. ¿Cuáles son las diferencias entre los problemas planteados por el grupo de estudiantes considerados con talento matemático y un grupo estándar de un colegio público estándar?

Se lograron encontrar varias diferencias entre las producciones de ambos grupos, las cuales fueron confirmadas mediante pruebas estadísticas. Para las variables cuantitativas se realizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad y la de Mann-Whitney o Kruskal Wallis para contrastar las diferencias entre las variables y los grupos de estudiantes. En el caso de las variables cualitativas, se realizó un análisis bivariante mediante tablas de contingencias y se empleó la prueba de Chi-cuadrado en aquellos casos donde el 80% de las casillas tuvieron una frecuencia esperada superior a cinco. En todas las pruebas estadísticas se utilizó un nivel de confianza del 95%.

En primera instancia se observó que el grupo talento planteó una mayor cantidad de enunciados cuyo contexto es necesario para resolverlo. De igual forma se encontró que los problemas de este grupo presentan algunas características que los hacen ser más ricos que los inventados por el grupo estándar, ya que son más extensos y presentan una mayor fluidez de ideas, requieren de más pasos para ser resueltos, presentan una alta demanda cognitiva que incluyen la conexión de varias ideas o conceptos matemáticos, son más creativos, contienen más campos de conocimiento y establecen más conexiones entre los hechos. Este resultado es similar al encontrado en el estudio de Espinoza (2011) y Ellerton (1986), al concluir que los problemas planteados por estudiantes con más habilidad presentan mayor riqueza que los producidos por estudiantes de un colegio público estándar.

También se encontraron diferencias con respecto al pensamiento metacognitivo mostrado por ambos grupos, ya que los estudiantes del grupo talento realizaron al menos un cambio al problema, en contraste con los del grupo estándar, que lo hicieron en menor proporción. De hecho, estos cambios se centraron en la mejora de la redacción del problema o en los datos numéricos incluidos en el enunciado. De igual forma se hallaron diferencias en cuanto al tipo de contenido matemático implicado en las producciones, pues el grupo talento prefirió inventar problemas relacionados con los contenidos de cantidad y cambios y relaciones, mientras que el grupo estándar se centró en el bloque de cantidad. Lo mismo ocurrió con el campo de conocimiento, donde el grupo talento inventó problemas que combinan los bloques de Aritmética y Física, mientras que el grupo estándar se centró en Aritmética y Geometría.

Con respecto al tipo de número, ambos grupos emplearon mayoritariamente números naturales; sin embargo, el grupo talento también empleó una mayor proporción de problemas con números racionales.

En cuanto a la riqueza de los problemas, que fue estudiada mediante nueve variables, se encontró que los planteados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los del grupo estándar, ya que los primeros se encuentran en un nivel medio o alto, mientras que los segundos en un nivel bajo. Esto no fue así en la reformulación de problemas de mayor riqueza, donde ambos grupos se encuentran en un nivel bajo. A pesar de esto, las producciones que reformularon los estudiantes del grupo talento presentan más riqueza que los inventados por el grupo estándar.

Es importante destacar que en las variables contexto matemático, tipo de contexto según PISA, coherencia del enunciado, tipo de pregunta, empleo de ideas complejas, resolubilidad del problema y resolución del problema, no se encontraron diferencias significativas entre ambos grupos.

Por último, coincidimos con Espinoza (2011) en que las diferencias encontradas se percibieron en la sensación de dificultad al resolver los problemas, ya que en las producciones del grupo estándar fue relativamente sencillo encontrar un procedimiento para resolverlos;

mientras que varios problemas del grupo talento no son tan fáciles de resolver luego de leer el enunciado o incluso al analizar la solución dada por el estudiante.

Pregunta 3. ¿Cuáles son las diferencias, con respecto a las variables de estudio, de los problemas planteados en cada cuestionario de invención de problemas? ¿Cuál o cuáles tareas promueven plantear problemas con mayor riqueza?

El análisis de las producciones de los estudiantes también permitió encontrar algunas diferencias con respecto a los problemas planteados en cada uno de los cuestionarios. Dichas diferencias fueron confirmadas mediante las pruebas estadísticas descritas en la pregunta de investigación anterior.

En primera instancia se concluye que existen diferencias significativas en la categoría de contexto del problema según el tipo de cuestionario, ya que en los C1, C2 y C3 fue donde se plantearon la mayor cantidad de problemas extramatemáticos inmersos en un contexto personal; mientras que en el C4 se planteó la mayor cantidad de problemas intra matemáticos implicados en un contexto científico. Esto pudo ocurrir porque las tareas incluidas en el C1, C2 y C3 están vinculadas con situaciones cercanas a los estudiantes, mientras que las propuestas en el C4 son libres, de manera que el estudiante elige el contexto que prefiere. Del mismo modo, en el C4 sucedió que el contexto fue necesario para resolver el problema, en contraste con los demás cuestionarios donde el contexto no era necesario para resolverlo.

Además, se concluye que las tareas que solicitan a los estudiantes inventar un problema y luego reformularlo son las que promueven la invención de problemas con mayor complejidad matemática, ya que los enunciados planteados en el C4 son los que requieren más pasos para ser resueltos, contienen más ideas complejas, presentan la mayor demanda cognitiva y la conexión de diferentes conceptos o ideas matemáticas.

De igual forma ocurrió con la tarea propuesta en el C3, que también solicitaba reformular un problema que primero debían resolver. De hecho, en este cuestionario se encontraron los problemas con la media más alta de riqueza de los problemas. Este resultado se considera importante porque identifica, de alguna forma, el tipo de tarea donde se plantearon los problemas con los índices más altos en aquellas variables en las que se encontraron diferencias significativas por grupo. Esto coincide con lo expuesto por Singer & Voica (2013), quienes concluyen que la situación de invención de problemas más productiva es aquella en la que se plantea un problema, el estudiante lo resuelve y luego se le pide reformularlo con el fin de obtener un nuevo problema. De igual forma, se considera que se plantearon problemas más ricos en los dos últimos cuestionarios, porque los estudiantes necesitan de un periodo que les permita acomodarse y familiarizarse con una actividad completamente nueva que podría provocar la invención de problemas cada vez más complejos desde un punto de vista matemático. Esto coincide con Espinoza (2011) y Silver & Cai (1996), quienes afirman que los estudiantes plantean problemas más ricos en la segunda tarea de invención de problemas propuesta que en la primera.

También se concluye que los estudiantes evidenciaron mayor control cognitivo y principios de autocorrección en los problemas inventados con base en el C1. Se esperaba que esto ocurriera en mayor medida en el C3 o C4 por el periodo de acomodación y familiaridad citado anteriormente. Además, las producciones con base en el C1 son las más extensas y las que presentan mayor fluidez de ideas.

Otro aspecto que llama la atención es que las tareas del C2 que incluyen una imagen como reactivo son las que presentaron la media más baja de nivel general de riqueza de los problemas. Además, en este cuestionario se encontraron la menor cantidad de características sobresalientes. Esto coincide con el estudio de Espinoza (2011), quien afirma que los problemas más ricos fueron planteados con base en situaciones expuestas de forma textual y no con base en alguna imagen.

Por último, en las variables coherencia del enunciado, flexibilidad numérica, tipo de pregunta, resolubilidad y resolución correcta del problema no se encontraron diferencias significativas por tipo de cuestionario.

Pregunta 4 ¿Existen diferencias en cuanto a la riqueza de los problemas de ambos grupos?

Al realizar el análisis de las producciones con base en la rúbrica diseñada para valorar la riqueza de un problema matemático, así como el análisis estadístico realizado, se puede constatar que sí existen diferencias significativas en cuanto a la riqueza de los problemas planteados en ambos grupos.

Al respecto se concluye que las producciones del grupo talento presentan mayor riqueza general que los inventados por el grupo estándar, ya que en términos generales son más extensos, contienen diferentes tipos de números, implican varios pasos para ser resueltos, incluyen varios campos de conocimiento, presentan un nivel de complejidad alto según la clasificación de PISA, requieren una alta demanda cognitiva, evidencian mayor control metacognitivo, presentan más fluidez de ideas y conexión entre los hechos. Además, se encontró que los estudiantes del grupo talento se caracterizaron por inventar problemas con un nivel de riqueza general de medio o alto; mientras que el grupo estándar lo hizo en un nivel bajo.

Este resultado se considera importante porque la rúbrica elaborada permitió valorar de forma cuantitativa el nivel de riqueza de cada uno de los problemas inventados a partir de las variables definidas inicialmente. Además, permitió establecer diferencias que fueron confirmadas estadísticamente entre ambos grupos, así como ubicarlos en uno de tres niveles de riqueza general definidos de acuerdo con las puntuaciones obtenidas.

Pregunta 5. ¿Es posible emplear tareas de invención de problemas para identificar estudiantes con talento matemático?

A pesar de que existen pocos estudios que aborden la invención de problemas como instrumento para identificar estudiantes con talento matemático, consideramos que esta investigación aporta elementos que confirman que este tipo de actividades pueden ser empleadas con tal propósito.

Primeramente, el estudio concluye que los estudiantes del grupo talento presentan algunas características cuando se enfrentan a tareas de invención de problemas que los diferencian de sus compañeros de un colegio público estándar. También consideramos que estas diferencias se reflejaron en la sensación de dificultad percibida al momento de analizar la solución de cada problema, ya que los planteados por el grupo talento tienen la impresión de ser más difíciles al no identificar de forma inmediata un procedimiento para resolverlos.

Otro elemento que podría indicar el uso de este tipo de actividades como instrumento para identificar el talento matemático, es que los problemas del grupo talento contienen mayor riqueza general que los inventados por el grupo estándar. Es importante destacar que para valorar la riqueza de los problemas se emplearon nueve variables en las que se presentaron diferencias significativas entre grupos.

Además, se mostró que si tomamos el grupo estándar como control e identificamos con talento matemático aquellos estudiantes que obtuvieron puntuaciones superiores al percentil

75 de riqueza general de los problemas, entonces el 95,65% de los estudiantes del grupo talento hubiesen sido identificados como tal, que corresponden a 22 de 23 estudiantes de este grupo.

De igual forma, consideramos que las diferencias encontradas en la creatividad que mostraron ambos grupos es otro elemento que puede suponer un aporte a la identificación del talento matemático. Al respecto, el estudio concluyó que los estudiantes del grupo talento inventaron más problemas originales que sus compañeros del grupo estándar y mostraron más flexibilidad al momento de inventar problemas.

Por último, el instrumento empleado permitió a los estudiantes poner en evidencia sus capacidades y habilidades en matemáticas, obteniéndose una alta tasa de respuesta y una diversidad de problemas. Además, de acuerdo con el análisis del instrumento realizado, este presenta una fiabilidad buena.

Así, coincidimos con estudios previos que sugieren la incorporación de este tipo de actividades como una herramienta para identificar estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986; Espinoza, 2011; Kean et al., 2010; Krutetskii, 1976).

5.2. Limitaciones

Este estudio presentó limitaciones relacionadas con los siguientes aspectos: los sujetos de estudio, el tiempo que tuvieron los estudiantes para completar el instrumento y el conocimiento que éstos tienen sobre la invención de problemas.

En relación con la primera limitación, los sujetos con talento son un grupo de estudiantes pequeño dentro de la población escolar, por lo que no se puede generalizar sus resultados a todo el colectivo de estudiantes. Además, el estudio se realizó con un grupo de estudiantes considerados con talento matemático de una determinada región de Costa Rica, por lo que es necesario replicar la experiencia en otras regiones o países para generalizar los resultados.

Además, creemos que el tiempo disponible para aplicar el instrumento fue una limitación, tanto para la cantidad de tareas incluidas en el instrumento como en la obtención de problemas con mayor riqueza. Con relación al primero, aunque el instrumento empleado presenta una diversidad de tareas de invención de problemas, no se pudieron incluir otras tareas que fueron identificadas en la literatura consultada, ya que se contó con dos sesiones de 80 minutos para completarlo. En relación con la segunda, se recomienda que los estudiantes dispongan de más tiempo de manera que puedan replantear el problema, modificando lo que sea necesario, hasta que cumpla con sus expectativas. Esto porque cuando se inventan problemas se necesita de un periodo de tiempo para que las ideas y relaciones entre los datos vayan surgiendo y evolucionando.

Por último, consideramos que es necesario que los estudiantes cuenten con conocimientos sobre la invención de problemas, ya que se observó que tuvieron dificultades para realizar la actividad, porque en ocasiones no sabían cómo iniciar o qué problema inventar. Esto ocurrió con más fuerza en las primeras tareas propuestas. Por tanto, consideramos que si los estudiantes tienen alguna experiencia previa en invención de problemas, quizás plantearían enunciados más consistentes, claros y con mayor riqueza.

5.3. Líneas abiertas de investigación

Una vez concluida esta investigación, consideramos que quedan abiertas algunas líneas de investigación que son de interés en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y en las que creemos pertinente profundizar. Por ejemplo, es necesario continuar con el estudio de los tipos de tareas y estrategias que se puedan emplear en actividades de invención de problemas. Al respecto, nuestro estudio aporta una tipología de tareas y estrategias que serían interesantes incluir en otras investigaciones, con el fin de determinar aquellos reactivos que promuevan la invención de problemas con gran riqueza.

Otra línea abierta está relacionada con los procesos para valorar las producciones de los estudiantes ante este tipo de actividades, el cual es un tema que ha sido poco abordado por la comunidad interesada en el tema. Por tanto, es necesario profundizar en variables e indicadores que permitan una valoración más acertada sobre los conocimientos, habilidades, y creatividad que muestran los estudiantes cuando inventan problemas.

De igual forma, se podría continuar con el uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento matemático, dado que los resultados al respecto son escasos. Para ello consideramos necesario elaborar o mejorar la rúbrica presentada en este estudio para valorar la riqueza general de los problemas y comparar el rendimiento de este tipo de estudiantes en pruebas de invención de problemas y resolución de problemas matemáticos. En esta línea, se va a elaborar una propuesta para que se incluyan determinadas tareas de invención en las pruebas de acceso al Colegio Científico en el que se ha realizado esta investigación, con el objetivo de analizar su potencialidad diagnóstica.

Por último, sería interesante replicar esta investigación con estudiantes con talento matemático de otros países y comparar los resultados con los mostrados en este estudio, tratando de establecer analogías y diferencias para así consolidar resultados.

5.4. Una reflexión docente

Encontramos acertado concluir esta memoria con algunas reflexiones educativas que surgen del trabajo realizado y de la experiencia profesional durante más de 14 años laborando en una institución que agrupa alumnos con talento.

Primeramente, la literatura afirma que esta población ha sido una de las más olvidadas dentro del sistema educativo, que promueve una educación homogenizada o estandarizada para todos los estudiantes. En Costa Rica se han realizado algunos esfuerzos, principalmente a nivel político, para atender con una educación más pertinente, acertada y diferenciada a esta población. Sin embargo, éstas quedan en el papel al no existir directrices claras de parte del Ministerio de Educación Pública sobre la implementación de dichas políticas en las aulas. Además, existe una falta de preparación de los docentes para atender con éxito a este tipo de población.

Esto se refleja en las opiniones de los estudiantes que ingresan al sistema de Colegios Científicos, quienes mencionan que la educación que recibían antes de ingresar al sistema era prácticamente la misma que la de sus compañeros. Incluso consideran que en algunas ocasiones se sintieron aislados o discriminados por su situación de alta capacidad. Específicamente en clases de matemática, mencionan que se sentían aburridos pues las tareas que les proponían las consideraban muy fáciles de resolver y sin ningún reto para ellos. Esto les provocaba desmotivación y falta de interés hacia las clases de matemática.

No obstante, consideran que al ingresar al sistema de Colegios Científicos tuvieron la oportunidad de desarrollar sus capacidades y potencialidades al recibir una educación diferenciada. Según ellos, esto les ha permitido tener experiencias educativas más ricas, que les suministran desafíos acordes con sus características y necesidades, en un ambiente más adecuado en el que interactúan cognitivamente y socialmente con chicos que tienen sus mismos intereses.

En este centro los estudiantes reciben contenidos, materiales y técnicas que aparecen en el currículo ordinario de secundaria, pero con mayor profundidad. De igual forma, se enseñan contenidos propios de los primeros cursos universitarios.

Además, coincidimos con Lupiáñez (2016) al considerar que las tareas que propone el docente en clases de matemática, constituyen un medio clave para motivar a los estudiantes en el aprendizaje de un conocimiento nuevo. Así, esta investigación pone de manifiesto el efecto e interés formativo que tienen las actividades de invención de problemas en la enseñanza de las matemáticas como tarea de clase.

De igual forma, es un recurso potente e innovador que es avalado por la investigación. Al respecto la literatura consultada muestra las bondades de emplear este tipo de tareas, destacándose su implementación para potenciar las habilidades de los estudiantes, observar la comprensión de sus conocimientos y disminuir algunos problemas asociados a la enseñanza de las matemáticas.

Por tanto, las tareas de invención de problemas son un recurso educativo que debería promoverse en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos. Para ello, es necesaria la concientización del docente sobre el gran valor educativo que ésta tiene, pues existe un desconocimiento al respecto. De igual forma, se requiere que los profesores se capaciten en el diseño e implementación de tareas de invención de problemas. Además, se deben realizar más estudios que aborden los desafíos que enfrentan los estudiantes cuando resuelven este tipo de tareas, así como esquemas de análisis que permitan valorar las producciones de los estudiantes.

Así mismo, mi experiencia como docente de estudiantes con talento y la experiencia obtenida al estudiar los procesos de invención de problemas, me permite afirmar que este tipo de actividades es una estrategia valiosa para desarrollar las capacidades y habilidades hacia las matemáticas que tienen estos estudiantess.

Por otra parte, nos unimos al interés de investigadores que se han preocupado por esta población que reclaman cada vez más nuestra atención. Ramírez (2012) destaca las habilidades visuales que presentan los chicos con talento. Benavides (2008), que caracterizó este grupo de sujetos empleando la resolución de problemas. Además, los estudios que analizan las estrategias de invención de problemas que emplean este tipo de estudiantes

(Pelczer, et al., 2008; Arikan & Unal, 2015); los que exploran el efecto de las tareas de invención de problemas sobre el desarrollo de habilidades matemáticas de estudiantes con talento (Kesan et al., 2010;) y los que estudian si los estudiantes con talento tienen mayor capacidad de invención de problemas que sus compañeros con menos habilidad (Krutetskii, 1976; Ellerton, 1986; Silver & Cai, 1996; Singer, Voica & Sarivan, 2015).

En este sentido, destacamos las potencialidades que tiene la invención de problemas para estudiar el talento matemático. Además, es una herramienta que aporta no solo información cuantitativa referente a la identificación, sino que arroja características, comportamientos, habilidades, destrezas e incluso errores que podrían ser tomados en cuenta en una futura intervención.

No obstante, la invención no es patrimonio del talento y hemos visto buenos ejemplos de problemas que han creado niños estándar. Además, es un medio que le permite al docente observar la comprensión que tienen los estudiantes sobre un determinado conocimiento, así como sus dificultades de aprendizaje. Por último, destacamos el gran valor que tiene al contribuir al desarrollo de la competencia matemática de todos los estudiantes.

REFERENCIAS

Arikan, E., & Unal, H. (2015). Investigation of problem-solving and problem-posing abilities of seventh-grade students. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15*(5), 1403–1416. https://doi.org/10.12738/estp.2015.5.2678

Ayllón¸M. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

Ayllón, M. F. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria (tesis doctoral)*. Universidad de Granada, Granada.

Ayllón, M. F., Castro, E., & Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 277–286). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado el 25/08/2015 de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3731153.pdf.

Ayllón, M. F. (2005). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

Ayllón, M. F., Ballesta-Claver, J., & Gomez, I. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, *4*(1), 169–193. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016. v4n1.89

Ayllón, M. F., Gallego, J. L., & Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos*, *38*(152), 51–67.

Ayllón, M. F., & Gomez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta*, *17*, 29–40.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21,* 633-636.

Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Education Journal*, *6*(2), 141–149.

Barbarán, J. J., & Huguet, A. (2013). El desarrollo de la creatividad a través de la invención de problemas matemáticos. Un estudio con alumnos de Secundaria. *Revista Internacional de Educación y Apredizaje*, *1*(2), 1–9.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E., & Blanco, R. (2004). *La Educación de Niños con Talento en Iberoamérica*. Santiago: Oreal-Unesco. Recuperado el 25/04/2016 de http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001391/139179s.pdf

Bisquerra, A. (2005). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: Editorial La Muralla.

Blanco, L., Cárdenas, J., & Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas*. Cáceres: Universidad de Extremadura.

Blanco, R., Rios, C. G., & Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamerica* (pp. 49–60). Santiago: Oreal-Unesco.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Bouvier, A., & Geroge, M. (1979). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Akal Editor.

Brown, S., & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S., & Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Burcin, B. (2005). *The Efect of instruction with problem posing on tenth grades student's probability achievement and attitudes toward probability* (Master´s tesis). Middle Esast Technical University, Ankara.

Caraballo, R. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas. Una experiencia con profesores* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Cárdenas, J. F., & Malaspina, U. (2016). Creatividad en la invención de problemas sobre operaciones con expresiones decimales. Un estudio con estudiantes de sexto grado de primaria. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, *5*(1), 54–66.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113–140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Recuperado el 10/02/2010 de http://funes.uniandes.edu.co/1191/

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, & A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática* (pp. 1–15). Granada: Departamento de didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula*, *21*, 85–104.

Cázares, J. (2000). *Invención de problemas por escolares de primaria. Un estudio Evolutivo* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

Chapman, O. (2012). Prospective Elementary School Teacher's Ways of Making Sense of Mathematical Problem Posing. *PNA*, *6*, 135–146.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *37*(3), 149–158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

Cohen, L. M., Manion, L. & Morrison, K. (2007). Research methods in education, (6th ed). London: Rougtledge Falmer

C.R. Leyes, decretos, etc. (2015). *Reglamento para la promoción de la alta dotación, talentos y creatividad en el sistema educativo costarricense N. 38808-MEP*. San José: Imprenta Nacional.

Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemáticas* (Tesis doctoral). Instito superior Pedagógico José de la luz y Caballero, Holguín.

Díaz, E., Aleman, H., & Hernández, C. (2013). Un modelo pedagógico para desarrollar el potencial de estudiantes talentosos en matemática en Costa Rica. *Uniciencia*, *27*, 51–66.

Dolores, M., Grigorenko, M. F & Sainz, M. (2011). Inteligencia creativa y alta habilidad. en Dolores, M. (Ed). *Psicología de la excepcionalidad* (pp. 73-88). Madrid: Síntesis

do Carmo Gonçalves, F., & de Souza Fleith, D. (2013). Creatividad en el aula: percepciones de alumnos superdotados y no-superdotados. *Revista de Psicología* 31(1), 37-66.

Ellerton, N. (1986). Children´s made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261–271.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

English, L. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in mathematics Education*, *29*(1), 83–106. https://doi.org/10.2307/749719

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children`s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 183–217.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(2), 1–12.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *14*(39), 368–392.

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia*, *29*(1), 58–81.

Fernández-Bravo, J. A., & Barbarán, J. J. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *32*, 29–44.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a traves de problemas verbales* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Fernández, J. A., & Barbarán, J. J. (2015). *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Madrid: Editorial La Muralla.

Fernández, J. A., Castillo, S., & Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *Edupsykhé*, *9*(2), 221–234.

Fernández, E. (2018). *Conocimiento conceptual del simbolismo algebraico adquirido en la educación secundaria obligatoria. Un estudio a través de la invención de problemas* (Tésis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Fonseca, Ó. (2016). De la educación especial de estudiantes con necesidades educativas especiales por superior intelecto. *Cuadernos Educativos*, *3*, 58–68. https://doi.org/10.1111/j.1708-8305.2010.00471.x

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades : A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51–75.

García, R. (2014). *Diseño y validación de un instrumento de evaluación de la Competencia Matemática. Rendimiento matemático de los alumnos más capaces* (Tesis doctoral) Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference. 11.0 update* (4a ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Ghasempour, A. Z., Bakar, M. N., & Reza, G. (2013). Mathematical Problem Posing and Metacognition: A Theoretical Framework. *International Journal of Pedagogical Innovations*, *1*(2), 63–68. https://doi.org/10.12785/ijpi/010201

González, M. (2015). Perfiles cognitivos asociados a alumnos con altas habilidades intelectuales (Tesis doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.

González, M., & Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula*, *21*, 21–32.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14–17.

Hernández, R., Fernández, C., & Pabtista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F: McGraw-Hill.

Hoth, J., Kaiser, G., Busse, A., Döhrmann, J. K & Blömeke , S. (2017). Professional competences of teachers for fostering creativity and supporting higt -achieving students. *ZDM Mathematics Education, 49*(1)*,* 107-120. Http: doi: 10.1007/s11858-016-0817-5.Google Scholar

Kaba, Y., & Şengül, S. (2016). Developing the Rubric for Evaluating Problem Posing (REPP). *International Online Journal of Educational Sciences*, *8*(1), 8–25.

Kesan, C., Kaya, D., & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student's Mathematical Abilities, *2*(3), 677–687.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem com from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 71–86. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are the? En M. Avotina, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramaña, L. Sheffield, & E. Velikova (Eds.), *proceedings of the 6º International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120–125). Latvia: Latvia University.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: Universidad de Chicago Press.

Kwek, M. L. (2015). Using problem posing as a formative assessment tool. En *Mathematical Problem Posing* (pp. 273–292). New York: Springer.

Kwek, M. L & Lye, W. L. (2008). Using problem-posing as an assessment tool. Paper presented at the *10° Asia Pacific conference on Giftedness Singapore,* Singapur. Recuperado el 15/10/2010 de http://hkage.org.hk/en/events/080714_10th_APCG.htm

Leung, S. S., & Silver, E. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the Arithmetic Problem Posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217299

Lin, P. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. *Proceedins of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 257–264.

Lopez-Andrada, B., Beltrán, M. T., López-Medina, B., & Chicharo, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: Ministerio de Educación y cultura, Centro de investigación y Documentación Educativa.

Luque, A. (2004). *La invención de problemas en los que intervienen fracciones por estudiantes del tercer curso de secundaria* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

Lupiáñez, J. L (2016). Lo ordinario y extraordinario en el aula de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 15*(11), 253-268.

Machado, A. L., (2004). Presentación. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp9-13). Santiago: OREALC/UNESCO.

Malaspina, U. (2011). Sobre creación de problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, *28*, 151–158.

Malaspina, U. (2013). Creación de problemas. Un caso con probabilidades. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, *33*, 119–124.

Malaspina, U. (2015). Creación De Problemas: Sus Potencialidades En La Enseñanza Y Aprendizaje De Las Matemáticas, 321–331.

Malaspina, U., & Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia y la investigación. En *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Lima: Editorial Moshera S.R.L.

Manuel, D., & Freiman, V. (2017). Differentiating Instruction Using a Virtual Environment: A Study of Mathematical Problem Posing Among Gifted and Talented Learners. Introduction. *Global Education Review*, *4*(1), 78–97.

Manzano, A., Arranz, E. & Sánchez de Miguel, M. (2010). Multi-criteria identification of Gifted Children in a Spanish Sample. *European Journal of Education and Psichology, 3*(1), 5-17.

Marjoram, D. & Nelson, R. (1988). Talento matemáticos. En J. Freeman (Ed). *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Martínez, M., & Guirardo, A. (2010). *Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Barcelona: Editorial Graó.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programa de Estudio Matemática I, II, III ciclo de l*a Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. MEP. San José, Costa Rica.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.

Ngah, N., Ismail, Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters*, *22*(12), 4205–4208. https://doi.org/10.1166/asl.2016.8106

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed), *Proceeding of the 25th Conference of the Internacional Group of Psychology of Mathematics Education*, Utretcht, Vol. 3, 431-438. Utretcht: The Netherlands.

OCDE (2003). *La medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencia y resolución de problemas.* Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Recuperado el 20/01/2018 de https://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf

OCDE (2006). *El programa PISA de la OCDE. ¿Qué es y para que sirve*. París: OCDE. Recuperado el 20/01/2018 de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

OCDE (2012). *Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., & Rodriguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*.

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Pelczer, I., Voica, C., & Gamboa, F. (2008). Problem Posing Strategies of First Year Mathematics Students. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30*, *4*, 97–104.

Pelzcer, I., & Gamboa, F. (2008). Problema posing strategies of mathematically gifted students. En R. Leikin (Ed.), *The 5th international conference on creativity in Mthematics and the Education of Gifted Students* (pp. 193–199). Haifa, Israel.

Peña, A. M., Martínez, R. A., Velázquez, A. E., Barriales, M. R., & López, L. (2003). Estudio de las características que percibe el profesorado en alumnos con alta capacidad intelectual. *Revista de Investigación Educativa*, *21*, 271–289.

Pérez, K., Álvarez, E., & Breña, C. (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Revista bases de las ciencia*, *1*(3), 25–34.

Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F: Trillas.

Prieto, M., & Catejón, J. L. (2000). *Los superdotados: esos alumnos excepcionales*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Prieto, M. D., Bermejo, M. R & López, O. (2000). Procedimientos de evaluación e identificación de los alumnos superdotados. En M. D Prieto & J.L Castejon (Eds), *Los superdotados: esos alumnos excepcionales* (pp. 45-75). Málaga: Ediciones Aljibe.

Puig, L., & Cerdan, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Puig, L., & Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 8–10. Recuperado el 15/12/2014 el a partir de http://www.uv.es/puigl/acapulco90.pdf

Ramírez (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Ramírez, R., Flores, P., & Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En A. Estrada, J. Carrillo, & T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499–510). Lleida: SEIEM.

Ramírez, M. C. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90. Recuperado el 12/09/2011 http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramirez.pdf

Raven, J. C., Court, J. H., & Raven, J. (1993). *Test de matríces progresivas. Escalas Coloreadas, General y Avanzadas*. Buenos aires: Paidós.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talents*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. S. (1996). En qué consiste lo sobresaliente: un reexamen de la definición de sobresaliente y talentoso. *Dossier, 5*, 12-29.

Reyes-Santander, P., & Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. . González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403–414). Santander: SEIEM.

Rodríguez, L., García, L., & Lozano, M. (2015). El método de proyecto para la formulación de problemas matemáticos. *Atenas*, *4*(32), 100–112.

Rogado, M.I, Nograro, C. R., Zabala, B., Etzebarría, A., Albes, M. C., García A. C., Gonzalo, P. I., Mauleón, J. M., Del Barrio, B. & Fernández, I (1994). *La Educación del alumnado de altas capacidades*. Pais Vasco: Departamento de Educación, universidad e investigación.

Rosli, R., Goldsby, D., & Capraro, M. M. (2013). Assessing students' mathematical problem-solving and problem-posing skills. *Asian Social Science*, *9*(16), 54–60. https://doi.org/10.5539/ass.v9n16p54

Santos, L. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Scattarética, F. (2017). *Caracterización de tareas multiplicativas a partir de la invención de problemas matemáticos* (Tesis de maestría). Universidad Católica del Norte, Antofogasta.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Seco, M., & Ramos, G. (1999). *Diccionario del español actual*. Madrid: Aguilar.

Shriki, A. (2013). A Model for Assessing the Development of Students' Creativity in the Context of Problem Posing. *Creative Education*, *4*(7), 430–439.

https://doi.org/10.4236/ce.2013.47062

Silva, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle.*, *7*(26), 81–91. Recuperado el 23/05/2007 de http://www.redalyc.org/pdf/342/34202606.pdf

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing.pdf. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for research in Mathematics Education, 27(5), 521-539.*

Silver, E., & Cai, J. (2005). Assessing students`mathematical problem posing. *Teaching Children Mathemtics*, *12*(3), 129–135.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S. ., & Kenny, P. . (1996). Posing mathematical problem: An exploratory study. *Jorunal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 293–309.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. C. K. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. *35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 137–166.

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 9–26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Singer, F. M., Voica, C., & Sarivan, L. (2015). How Difficult is a Problem? Handling Multi-layered Information Conveyed in a Variety of Codes. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, (203) 192–198. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.08.281

Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New york: Teachers College Press.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). Edit Cowan University: MASTEC.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. En P. Clarskson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Tojo, C. P., Fernández, O. D., Castaño, T. S., & Barreiros, M. F. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*, *13*(15), 30–39.

Tourón, J., Fernández, R., & Reyero, M. (2002). Actitudes del profesorado hacia la superdotación intelectual. implicaciones para el desarrollo de programas de formación. *Faisca*, *9*, 95–110.

Villarraga, M., Martínez, P., & Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en iberoamerica* (pp. 25–35). Santiago: Orealc-Unesco.

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 267–279. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0492-8

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*, 5–28. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-439-3_2

Zúñiga, L. (2009). Análisis de un proceso de selección de niños con talento matemático (Tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada.

ANEXO A

Instrumento piloto de recolección de información

Nombre del alumno ____

Género: Masculino ☐ Femenino ☐

Edad _______

Nombre del centro educativo ____

Nivel que cursa ____

Cuestionario #1

1. Inventa un problema matemático que tú puedas resolver, pero que consideres que es difícil para tus compañeros.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

2. Reformula el problema que inventaste anteriormente cambiando o agregando más información de modo que te parezca más difícil de resolver que el anterior.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

3. Inventa un problema matemático que consideres difícil de resolver y que se resuelva utilzando alguna o varias ecuaciones.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

4. Reformula el problema que inventaste cambiando o agregando más información de modo que te parezca más difícil de resolver que el anterior.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

Cuestionario #2

1. Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

"Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Heredia. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros"

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

2. Inventa la mayor cantidad de preguntas que puedas que estén relacionados con el siguiente enunciado. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.
   "Juan, María y Pedro son artesanos que venden sus productos en el mercado. Juan vende sandalias a ¢5000, María bolsos a ¢9500 y Pedro carteras a ¢6000. La semana pasada Juan vendió 15 productos más que Pedro, mientras que Pedro vendió el doble de productos que María. María vendió 42 bolsos esa misma semana"

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

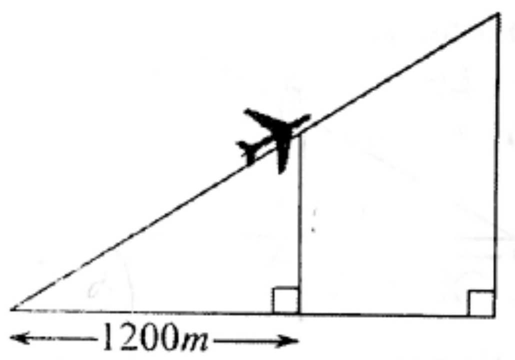
Cuestionario #3

1. De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

2. En la siguiente figura se muestra el momento en el que un avión despega de una pista. Inventa la mayor cantidad de problemas matemáticos que puedas que estén relacionados con dicha figura



¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

3. Inventa un problema matemático que esté relacionado con la información que se presenta en el siguiente recorte de periódico. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

¿Cómo valoras la dificultad de realizar esta tarea?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

ANEXO B

Instrumento de recolección de información

Nombre del alumno ____

Género: Masculino ☐ Femenino ☐

Edad _______

Nombre del centro educativo ____

Nivel que cursa: Décimo ☐ Undécimo ☐

Cuestionario 1

3. Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo considera necesario puede agregar más datos o información.

"Un tren con cuatro vagones para pasajeros y dos para mercancias sale de una estación de Cartago a las 9:00 am con destino a Alajuela. El tren puede transportar un total de 294 pasajeros y 2365 kg de mercancias.

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

4. Elige un contexto o situación de la primer columna y unos datos de la segunda columna para inventar un problema matemático.

• En el cine • En la fiesta del colegio • El jardín de mi casa • En un concierto de Rock • La memoría de mi Play Station 4 • En la tienda de ropa • Hay 10 niños y 15 niñas en una fila • Mientras jugábamos pokemon go	3, 6, 10, 21, 60, 1500, 2600, 14600 ½ , ¾, 7/5 20%, 35%, 50%, 60%, 75% -10, -25, -40, -3100 $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{120}$, $\sqrt{2100}$

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

Nombre____

Cuestionario 2

4. De acuerdo con la información de la siguiente figura inventa tres problemas matemáticos que te parezcan difíciles de resolver. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información. Resuleve el problema que consideras más difícil de resolver.

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

5. De acuerdo con la información del siguiente recorte de periódico, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver. Si lo consideras necesario, puedes agregar más datos o información.

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

Cuestionario #3

1. Resuelva el siguiente problema matemático.

"Juan, Pedro y Arturo se fueron de paseo el fin de semana a la playa y para regresar a casa decidieron turnarse para conducir. Arturo condujo 80 km más que Pedro, Pedro condujo el doble de kilómetros que Juan. Juan condujo 50 km.

a. ¿Cuántos kilometros condujo cada uno?

b. ¿Cuántos kilómetros recorrieron de la playa a la casa?

2. Inventa un problema matemático modificando alguno de los datos, información o pregunta del problema anterior. Si lo considera necesario puedes agregar más datos o información.

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

Nombre ____

Cuestionario #4

1. Inventa un problema matemático que puedas resolver, pero que consideres que es difícil para tus compañeros.

¿Cómo valora la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

2. Reformula el problema que inventaste anteriormente cambiando o agregando más información de modo que te parezca más difícil de resolver que el anterior.

¿Cómo valoras la dificultad de inventar este problema?

Fácil ☐ Regular ☐ Dificil ☐

ANEXO C

Rúbrica empleada para estudiar las producciones de los estudiantes

Grupo:______ Nº de estudiante:______ Cuestionario:______ Tarea: ______

1. *Coherencia*					
1	2	3	4	5	6

2. Longitud							
7	8	9	10	11	12	13	14

3. Tipos de números				
15	16	17	18	19

4. Cant Nº		
20	21	22

5. pregunta		
23	24	25

6. Pasos				
26	27	28	29	30

7. Ideas
31

8. Contenido			
32	33	34	35

9. Campos de conocimiento									
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45

10. Cant de campos		
46	47	48

11. Dif. PISA		
49	50	51

12. Metacognición				
52	53	54	55	56

13. Autocorrección		
57	58	59

14. Fluidez				
60	61	62	63	64

15. Conexiones			
65	66	67	68

16. Resol
69

17. Resolución	
70	71

18. Tipo de contexto			
72	73	74	75

19.Contexto matemático	
76	77

20. Relev Contex		
78	79	80

21. Dem. Cog (Pisa)		
81	82	83

22. Dem. Cog (Stein)			
84	85	86	87